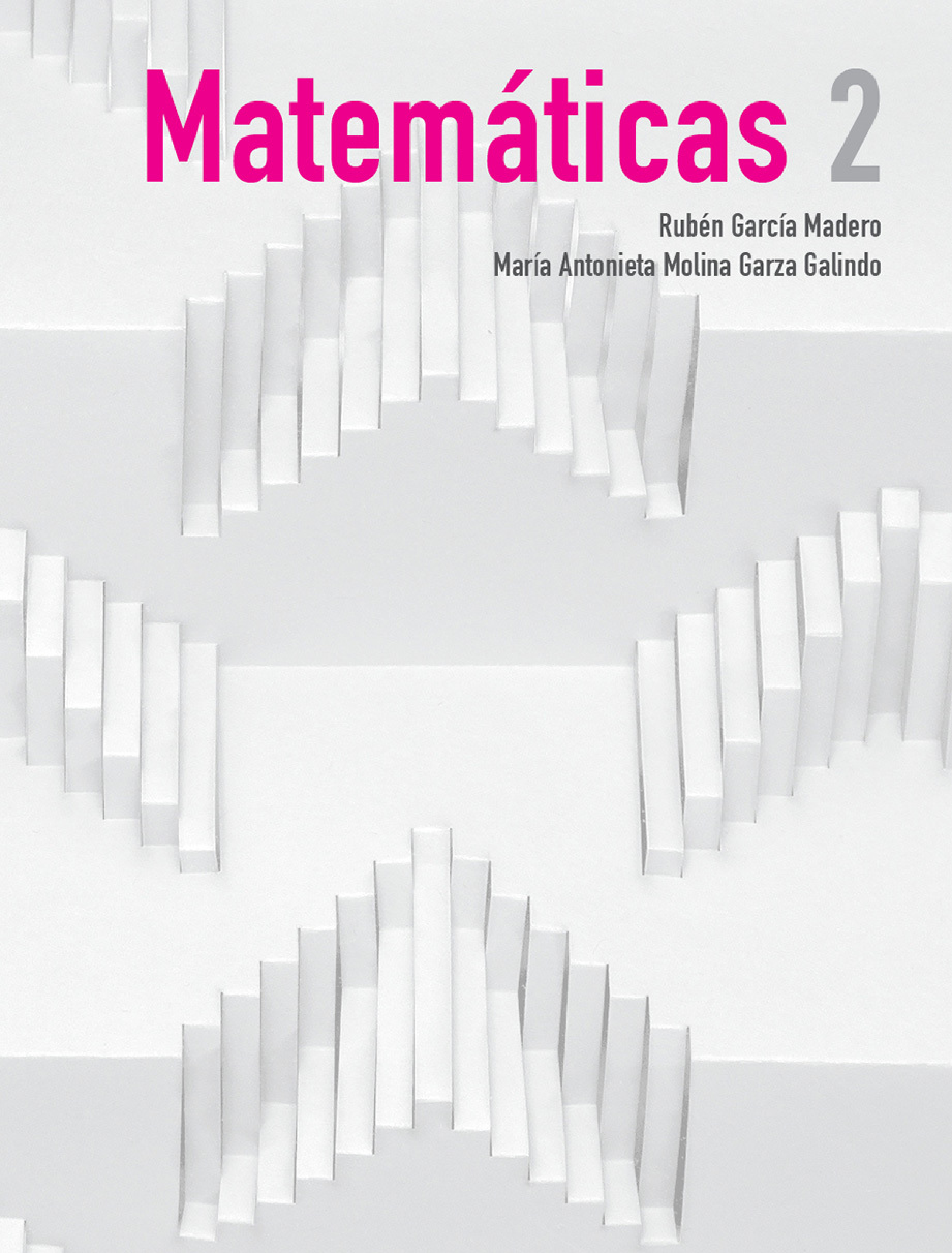
# Matemáticas 2

Rubén García Madero
María Antonieta Molina Garza Galindo



CORREO *del* MAESTRO

COORDINACIÓN EDITORIAL Roxana Martín–Lunas Rodríguez

AUTORÍA Rubén García Madero
María Antonieta Molina Garza Galindo

EDICIÓN Elena Martín–Lunas Rodríguez

REVISIÓN TÉCNICA Y PEDAGÓGICA Bertha Francisco Nicanor
Javier Paéz Cárdenas
Rubén García Madero

CORRECCIÓN DE ESTILO José María Fábregas Puig

COLABORACIÓN ESPECIAL Jorge Alcalde Martín del Campo

CUIDADO DE LA EDICIÓN Guadalupe Escalante Ramírez

DISEÑO DE INTERIORES Trazo Magenta, Francisco Ibarra Meza π,
Rosa Trujano López/Alógrafo

FORMACIÓN ELECTRÓNICA José Francisco Ibarra Meza π

DISEÑO DE CUBIERTA José Francisco Ibarra Meza π

INVESTIGACIÓN ICONOGRÁFICA Elena Martín–Lunas Rodríguez

ILUSTRACIÓN José Francisco Ibarra Meza π

FOTOGRAFÍA © Carlos Hahn
© Julián Ramírez Araujo
© Agencias: Shutterstock, Pixabay, Unsplash

OBRA DE CUBIERTA © Alba Rojo Cama †

FOTOGRAFÍA DE CUBIERTA © Carlos Hahn

GESTIÓN DE DERECHOS Y PERMISOS CORREO *del* MAESTRO

ISBN: 978-607-xxxx-xx-x


CORREO *del* MAESTRO, S.A. DE C.V.
Av. Reforma No. 7 Int. 403, Cd. Brisa
Naucalpan Estado de México, México C.P. 53280
Tels. 53-64-56-70 / 53-64-56-95
correo@correodelmaestro.com
www.correodelmaestro.com

Impreso en México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Reg. Núm. 2817



Sistema de clasificación Melvil Dewey DGMyME

510.0835
G3
2018 García Madero, Rubén
*Matemáticas 2* / Rubén García Madero, María Antonieta Molina Garza Galindo ; edición Elena Martín-Lunas Rodríguez . —
México: SEP : Correo del Maestro, 2018.

264 p.

Nivel: Secundaria.

ISBN 978-607-xxx-xx-x SEP

1. Matemáticas — Estudio y enseñanza — (Secundaria).
2. Matemáticas — Libros de texto. I. García Madero, Rubén, coaut. II. Martín Lunas Rodríguez, Elena, ed. II. t

# Presentación

Querido estudiante:

El libro de texto que tienes ahora en tus manos te enseñará distintos métodos y técnicas para analizar y resolver situaciones reales en contextos diversos que pueden resultarte interesantes, algunos de ellos los reconocerás como parte de tu vida cotidiana. Verás que aprender a clasificar, analizar, inferir, abstraer, deducir y generalizar, entre otros, son procesos que implican detenerte a pensar, a entender y poner en práctica lo que has descubierto para que, por tu cuenta y en forma colaborativa, puedas tomar decisiones y plantear problemas matemáticos.

En la secundaria has descubierto nuevos intereses y tomado conciencia de la forma en que construyes y te apropias de los conocimientos y desarrollas distintas competencias y habilidades. También has reflexionado sobre tus logros, las cuestas y los valles del camino recorrido y has vislumbrado algunos retos del trecho que aún te falta por andar.

Tú, y quienes conviven contigo en la escuela, continuarán aportando puntos de vista, maneras de ver y comprender que enriquecerán sus experiencias de vida y de aprendizaje. Los estudiantes entusiastas, como tú, que quieren ser parte de todo lo nuevo, te allanarán un tramo del camino; los docentes y directivos te estimularán, como siempre a ser consciente de todas tus capacidades, cada vez será más satisfactorio para ti vincular tu ámbito familiar y entorno próximo con tu proceso de pensamiento matemático.

Sabes que aprender Matemáticas significa dirigir tus esfuerzos a apropiarte de nuevas técnicas y formas de conocimiento, a valorar el uso que les das, a comunicar y a sustentar tus posturas a la vez sientes que lo que haces sirve para algo.

Aprender significa trabajar de manera autónoma, pero también en colaboración con los demás y para los demás, porque somos seres sociales, organizados para cooperar en el logro de determinados fines, conscientes de que la suma de esfuerzos conduce a la generación de nuevas ideas y a la creatividad en beneficio de todos.

Y es que todas las actividades que realizas en la escuela, y fuera de ella, te llevan a reflexionar sobre cómo descubres y construyes con los demás; de qué forma usas las tecnologías de la información y la comunicación sin perder de vista la existencia de otros recursos materiales, al tiempo que examinas y reconoces tus emociones y sentimientos para aprender de ti y con los otros.

Así pues, este libro de texto, resultado de esfuerzos conjuntos, se suma al cúmulo de herramientas que ya posees. Detente a razonar; haz una pausa para observarte y mirar con los ojos bien abiertos a tu alrededor: aprende a conocer, aprende a hacer, aprende a vivir con los otros… aprende a ser.

Autores y editores de Correo del Maestro

# Conoce
# tu libro

Con el apoyo del maestro,* lee las siguientes descripciones y recorre las páginas de este libro para que sepas cómo está estructurado. Cada uno de los tres **Módulos** cubre un trimestre del **calendario escolar:**

- agosto-noviembre
- diciembre-marzo
- abril-julio


Idea inspiradora

## Entrada de Módulo

Te invitamos a que leas estos textos sobre el tema de la energía, su importancia y cómo la usamos.

Verás que estos textos están vinculados con los **Aprendizajes** que lograrás a lo largo de cada **Módulo**.

Los retomarás en la **Evaluación del cierre de Módulo.**

## Ruta de Aprendizaje

Conoce los **Ejes**, **Temas** y **Aprendizajes esperados** del programa de la asignatura.

Sigue la ruta para ver cómo se desprende cada **Lección** de los **Aprendizajes esperados**.

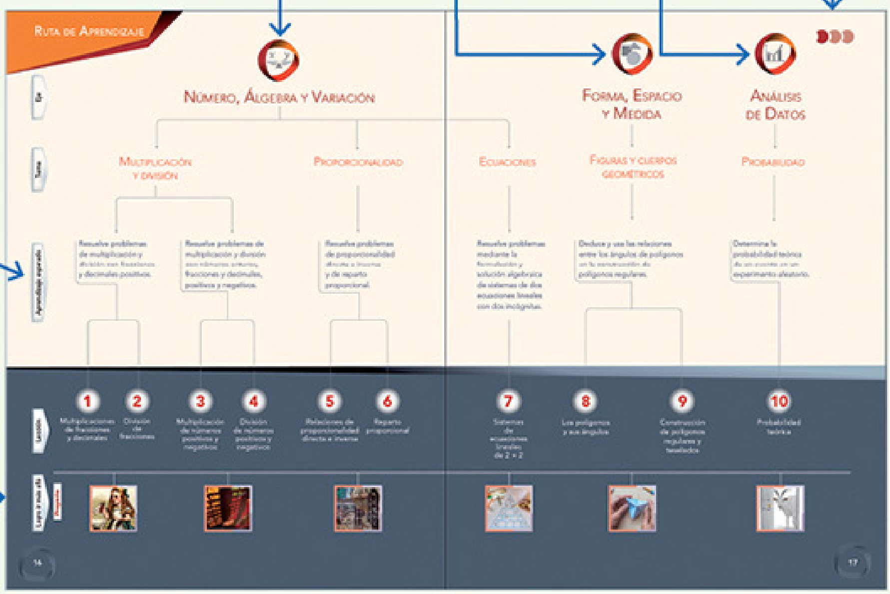
Aquí se muestra la secuencia de las **Lecciones** del **Módulo**.

Cada aprendizaje termina con una actividad que se llama **Logro ir más allá**, cada una se identifica con su imagen.

Consulta con frecuencia esta **Ruta** y también el **Índice de contenido**.

Icono de cada **Eje**

Indica el número de **Módulo**




* […] Por razones de corrección política, que no de corrección lingüística, se ha extendido la costumbre de hacer explícita la alusión a ambos sexos […]. Se olvida en estos casos que en la lengua está prevista la posibilidad de referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino, posibilidad en la que no debe verse intención discriminatoria alguna, sino la aplicación de la ley lingüística de la economía expresiva […] Por otra parte, [se] ha suscitado la creación de soluciones artificiosas que contravienen las normas de la gramática como "las y los ciudadanos". Véase: *Diccionario panhispánico de dudas*, Real Academia Española, 2005, sustento que se utiliza en este libro.

## Lecciones

En cada **Módulo** se distribuyen las **Lecciones** numeradas, que son secuencias didácticas de actividades.

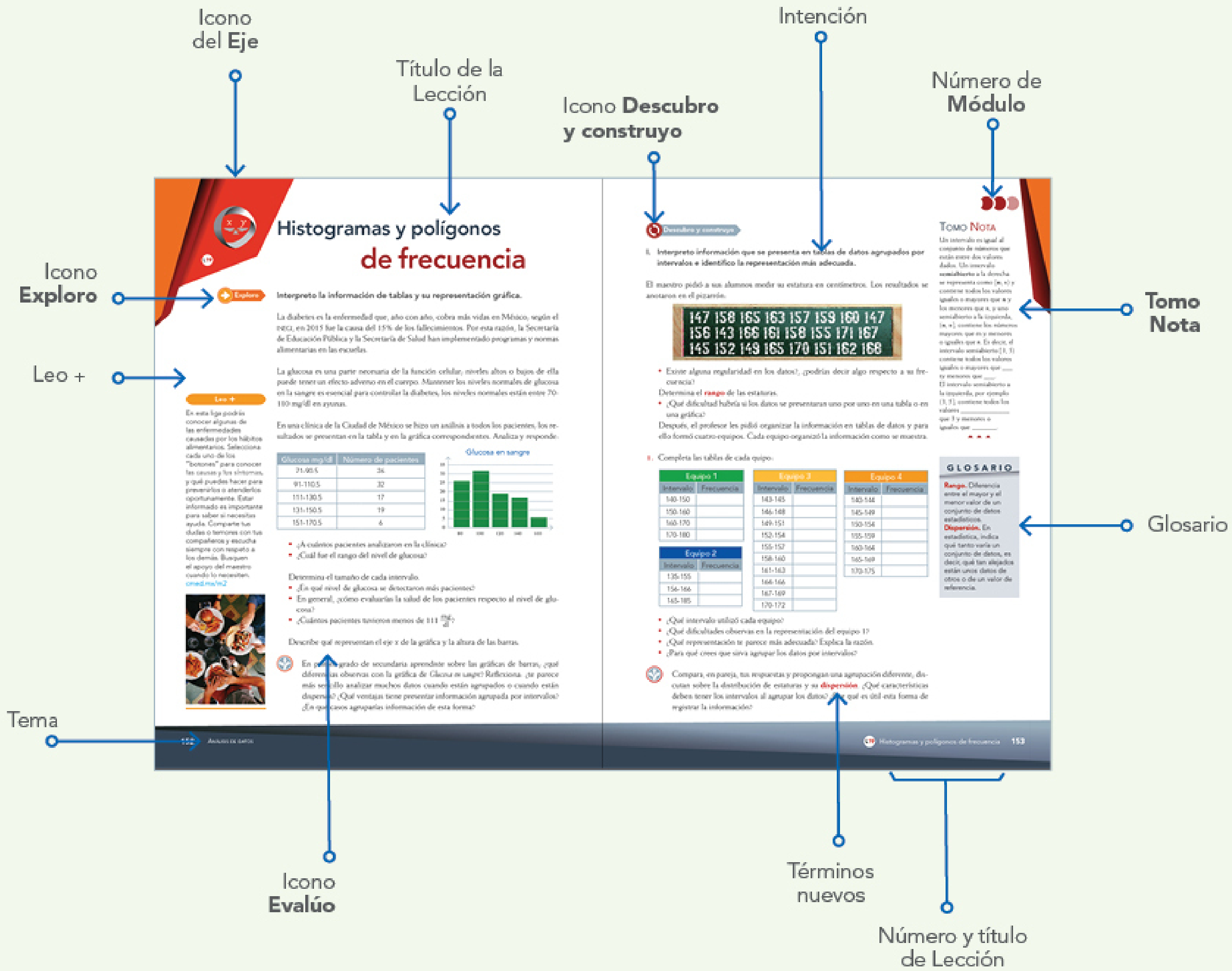
**Exploro** y **Descubro y construyo** son actividades que están centradas en motivar a la reflexión y la resolución de situaciones problematicas.

Incluyen la **intención** o propósito y cierran con el icono **Evalúo**.

Los **términos** o **conceptos** resaltados en **negritas** se explican a lo largo del contenido.

Los **términos nuevos** que enriquecerán tu vocabulario están resaltados con **color** y se explican en el **Glosario** al margen de la página.

Las **imágenes** son fotografías, dibujos, esquemas y gráficas que se leen como parte de los textos y de las **actividades** de cada secuencia didáctica.



## Actividades

**Exploro** Es la primera actividad de cada **Lección**. Les permitirá, a ti y al maestro, hacer un diagnóstico de lo que sabes y de tus intereses. Algunas veces la resolverás en forma individual, otras en pareja o en equipo.

**Descubro y construyo** Son retos o situaciones problemáticas presentadas en una secuencia con números romanos. Pondrás en práctica tus competencias matemáticas y de lectura y requerirás de una actitud de trabajo y reflexión para construir nuevos conocimientos en solitario, con tus pares en equipo o en grupo.

**Practico** Son ejercicios para que desarrolles, en forma individual, las técnicas y destrezas matemáticas, apliques y practiques lo que has aprendido.

**Logro ir más allá** Es la actividad de cierre de cada **Aprendizaje**.

**Evalúo:** es una breve valoración de tu aprendizaje con la que cierra cada actividad, en la que puedes llegar a conclusiones, concretar tus resultados y compartirlos con tus pares, en equipo o en grupo. Guarda esta evaluación en tu **Itacate de evidencias**, servirá como evaluación formativa y será un apoyo para que reconozcas cómo has aprendido.

Itacate

**Itacate de evidencias:** es la carpeta o portafolio en el que te sugerimos guardar todos los trabajos que hayas realizado, incluye tus logros de cada **Evalúo**. Cada vez que lo consultes, se convertirá en una guía para construir nuevos aprendizajes, y reconocer cómo has aprendido o bien para verificar tus logros al desarrollar cada secuencia de actividades.
Te sugerimos revisarlo antes de **Evalúo mi aprendizaje** y de **Evaluemos lo aprendido**.

## Recuadros

**Tomo Nota** Formalización matemática completa y otras que podrás completar al concluir las actividades. Te servirá como un apunte para tu **Itacate de evidencias**.

**Utilizo las TIC** Te será útil en la medida en que requieras indagar, investigar y verificar tu aprendizaje, o bien si deseas profundizar en alguna información o practicar en forma interactiva. Todas las ligas electrónicas fueron consultadas en septiembre de 2018.

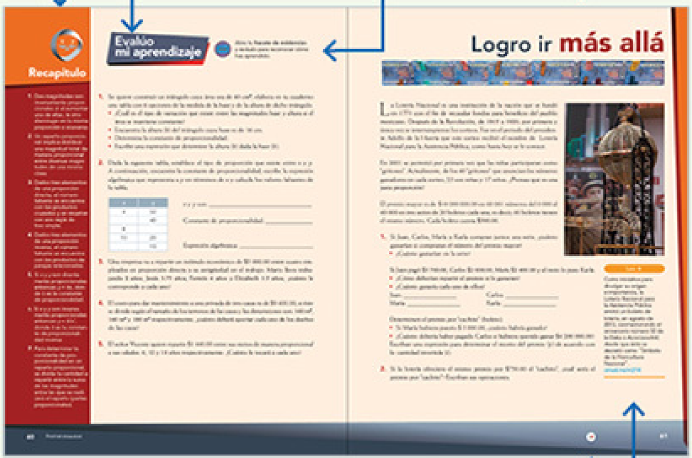
**Leo +** Son recomendaciones de lecturas de los "Libros del Rincón" y otros textos relacionados con el tema de estudio. Algunas veces incluyen imágenes.

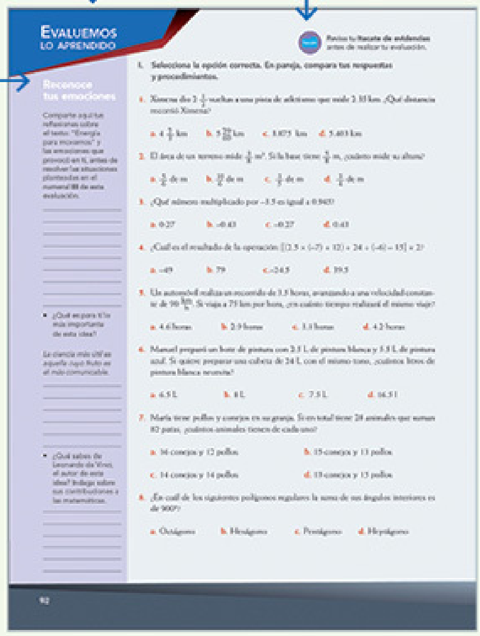
## Cierre del aprendizaje

**Recapitulo** Son los conocimientos puntuales que te permitieron alcanzar parte del **Aprendizaje esperado**.

**Evalúo mi aprendizaje** Es otra evaluación formativa que se encuentra al cierre de cada **aprendizaje**; puedes realizarla en forma individual o en parejas, pero siempre con la guía del maestro.
Retoma tu **Itacate de evidencias** antes de contestar la evaluación.

**Logro ir más allá** Es la actividad final de cada **aprendizaje**. Presenta situaciones problemáticas diversas.
Está relacionada con una parte de tu aprendizaje, para que practiques o juegues.
Te interesará compartirla también en ámbitos no formales.



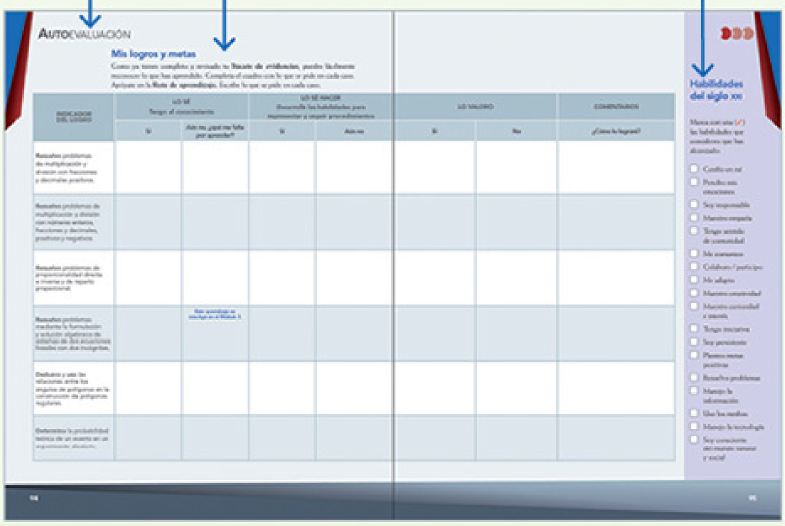

## Cierre de Módulo

**Evaluemos lo aprendido:** antes de iniciar la evaluación final, te invitamos a retomar nuevamente tu **Itacate de evidencias** para trabajar distintos tipos de evaluación, aplicar lo que has aprendido y medir tus logros en pareja, en equipo y con el maestro. Valorarás cómo organizaste y desarrollaste tus **Aprendizajes** y te ayudará a establecer tus metas.

**Reconoce tus emociones:** una invitación a reflexionar y a reconocer tus emociones en relación a los textos de inicio del **Módulo**.

**Autoevaluación:** cuadro para reflexionar sobre tus logros y metas.

**Habilidades del siglo XXI:** podrás señalar las habilidades y destrezas que has logrado desarrollar a lo largo del **Módulo**.




## Apéndice

**Tabla de correlación:** es el programa de la asignatura y su relación con las páginas del libro de texto.

**Bibliografía:** contiene la lista de las publicaciones, impresas y electrónicas recomendadas, en caso de que deseen investigar más sobre algún tema mencionado en esta obra. Se incluyen ligas electrónicas.

**Ligas electrónicas.**

**Créditos iconográficos.**

# Índice de contenido

*La ciencia más útil es aquella cuyo fruto es el más comunicable.*

Leonardo da Vinci

1er
Módulo

## Energía para movernos

Cada vez que realizamos esas actividades que tanto disfrutamos, como bailar, conversar o correr hacia la chica o chico que nos gusta, consumimos energía que obtenemos de los alimentos. Así mismo, para mover un tren o para contar con luz eléctrica se necesita energía, que se obtiene del petróleo o el gas natural, y también del Sol o el viento.

La energía del Sol o del viento es renovable puesto que no se agota, mientras que el petróleo no lo es, ya que se agota a medida que se explota.

La ventaja de utilizar energías renovables es que no contaminan porque no producen residuos que alteran los patrones del clima y dañan el medio ambiente.

En nuestro país, desde hace décadas usamos tecnologías basadas en energías renovables, pero seguimos utilizando los derivados del petróleo. ¿Qué puedes hacer para reducir tus emisiones?, ¿conoces tu huella ecológica? Tomar conciencia de nuestro impacto nos orienta para contribuir a cuidar el planeta, y para ello podemos empezar reflexionando sobre lo que dijo Einstein: "Hay una gran fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad".

Para verificar el costo de energía eléctrica en tu hogar, multiplica el consumo medido en kilowatts-hora (kWh) por su precio.

Nota: watt= vatio.
Un kilowatt-hora equivale a mil watts-hora

Reflexiona sobre este texto, lo retomarás en la evaluación final del Módulo.

Eje

# NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN

Tema

## MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

## PROPORCIONALIDAD

Aprendizaje esperado

Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales, positivos y negativos.

Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Lección

1 Multiplicaciones de fracciones y decimales

2 División de fracciones

3 Multiplicación de números positivos y negativos

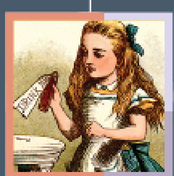
4 División de números positivos y negativos

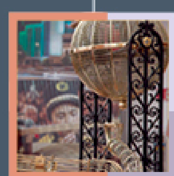
5 Relaciones de proporcionalidad directa e inversa

6 Reparto proporcional

Logro ir más allá

Proyecto





## Forma, Espacio y Medida

## Análisis de Datos

### Ecuaciones

Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

### Figuras y cuerpos geométricos

Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

### Probabilidad

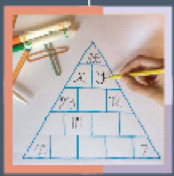
Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

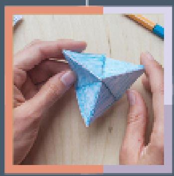
**7** Sistemas de ecuaciones lineales de 2 × 2

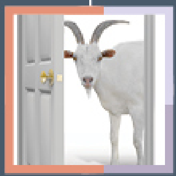
**8** Los polígonos y sus ángulos

**9** Construcción de polígonos regulares y teselados

**10** Probabilidad teórica







L1

# Multiplicaciones de fracciones y decimales

Las fracciones y los números decimales son representaciones numéricas con las cuales es posible operar.

Exploro

## Resuelvo problemas que incluyen fracciones y números decimales.

En la actualidad, las personas con dispacidad han recibido más atención dentro de la sociedad por múltiples factores, entre los cuales destacan: reconocer que quien vive con esta condición goza de los mismos derechos que el resto de la población; evitar la discriminación; la importancia de incluir a estas personas en el sector laboral y social; y, dado que con el envejecimiento puede sobrevenir una disminución o pérdida de la capacidad visual, auditiva y motriz, entre otras, aumentará, sin duda, el porcentaje de ciudadanos con discapacidad.

**Leo +**

Ingresa a cmed.mx/m21 para leer cuatro historias de éxito de personas con discapacidad.

En México, en el año 2010, según datos del INEGI, el número de personas que manifestaban algún tipo de discapacidad era de 5 739 270, que representaban 5.1% de la población total. Una gran cantidad de personas con discapacidad tienen historias de éxito, por ejemplo muchos deportistas, cuyos logros han sido destacados a nivel internacional al conseguir una gran cantidad de medallas olímpicas.

1. Resuelve lo siguiente:

Saúl es un atleta de alto rendimiento con discapacidad y su especialidad son las carreras de 1 500 metros en silla de ruedas. Todos los días entrena en una pista que mide 1.5 km de longitud. El día de hoy, en la primera parte del entrenamiento, dio $2\frac{1}{2}$ vueltas a la pista a un mismo ritmo..

- ¿Cuántos kilómetros recorrió en la primera parte del entrenamiento?
- ¿Qué hiciste para determinarlo?

Después, hizo una prueba de velocidad y recorrió $\frac{3}{4}$ de la pista en 3.15 minutos.

- ¿Qué distancia recorrió en la prueba?
- ¿Cuántos minutos con cuántos segundos hizo?
- ¿Qué procedimiento seguiste para responder?

Compara tus procedimientos con los de otros compañeros. Coméntenlos y determinen cuáles son los más eficaces.

Descubro y construyo

**I. Resuelvo problemas en los que aparecen multiplicaciones que incluyen fracciones y números decimales.**

1. Retomen, en parejas, el problema de la página anterior y determinen la distancia que recorre Saúl si da las vueltas a la pista que se muestran en la tabla. Indiquen el resultado en fracción y en número decimal.

| Vueltas | Distancia (km) |
|---|---|
| 3 | |
| $3\frac{1}{2}$ | |
| $4\frac{1}{3}$ | |
| $5\frac{2}{5}$ | |

- ¿Qué procedimiento siguieron para completar la tabla?

2. Resuelvan los siguientes problemas con la información que se da a continuación.

   a. Martín es agricultor y en la última temporada obtuvo una cosecha de 4.65 toneladas de frijol y 2.34 toneladas de habas.
   - Si vendió la mitad de la cosecha de frijol a un cliente, ¿cuántas toneladas vendió?
   - ¿Qué hicieron para responder?
   - Si vendió $\frac{2}{5}$ de la cosecha restante a otra persona, ¿qué operación permite saber qué parte de la cosecha vendió?
   - ¿Qué fracción de la cosecha vendió?
   - ¿Cuántas toneladas le vendió a este cliente?
   - ¿Qué hicieron para calcular el resultado?

   b. De la cosecha de habas le vendió $\frac{2}{3}$ a un misma persona.
   - ¿Qué multiplicación permite calcular las toneladas de habas que vendió?
   - ¿Cómo pueden resolver la multiplicación?
   - ¿Cuántas toneladas de habas vendió?
   - Si $\frac{1}{4}$ del resto de habas lo regaló a un familiar para apoyarlo, ¿qué parte de la cosecha le queda? ¿A cuántas toneladas equivale?

Comparen sus resultados con los de otra pareja. ¿Qué estrategia siguieron para multiplicar una fracción y un número decimal? Compartan sus respuestas con otros integrantes en busca de encontrar la estrategia más eficaz y registren sus conclusiones.

## II. Completo tablas de proporcionalidad directa usando fracciones y decimales.

La **densidad** es una propiedad de los sólidos, de los líquidos e incluso de los gases. La densidad es igual a la cantidad de masa por unidad de volumen, es decir, representa los gramos o kilogramos por unidad de volumen. Por ejemplo, 1 litro o 1 $dm^3$ de agua tiene una masa de 1 kg, es decir, la densidad del agua es igual a 1 $kg/dm^3$.

1. Consideren, en equipo, la densidad de los siguientes líquidos y resuelvan.

| Sustancia | Gasolina | Petróleo | Leche | Sangre |
|---|---|---|---|---|
| Densidad $kg/dm^3$ | 0.78 | 0.8 | 1.03 | 1.48-1.6 |

- ¿Cómo pueden determinar la masa de $x$ litros de cada sustancia?
- ¿Cuál es la masa de $1\frac{3}{4}$ de litro de gasolina?
- ¿Qué masa tienen $3\frac{1}{2}$ litros de leche?
- La densidad de la sangre se presenta en un **rango**. Considerando el punto medio del rango, ¿cuántos kilogramos hay en $\frac{1}{4}$ de litro de sangre?
- Si se quiere saber la masa de $\frac{1}{3}$ de litro de petróleo, ¿con qué números es más conveniente operar?
- ¿Cuál es la masa de $\frac{1}{3}$ de litro de petróleo?

### GLOSARIO

**Rango.** Intervalo entre los valores máximo y mínimo de un conjunto de valores numéricos. El punto medio del rango es igual al promedio de los valores extremos.

2. Completen la siguiente tabla. En el caso de la densidad de la sangre, consideren el punto medio del rango.

| | Masa (kg) | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cantidad de sustancia (L) | Gasolina | Petróleo | Leche | Sangre |
| $\frac{3}{4}$ | | | | |
| 2 | | | | |
| $1\frac{5}{6}$ | | | | |
| $4\frac{3}{5}$ | | | | |

- Con base en los datos de la tabla anterior, ¿pueden determinar la densidad de cada sustancia? ¿Cómo?
- ¿En qué casos usaron fracciones y en cuáles números decimales?

### Tomo Nota

Para multiplicar un número decimal por una fracción, se puede operar con fracciones o decimales, de acuerdo con el contexto y las cantidades involucradas, utilizando los procedimientos que ya conoces. Por ejemplo,

$$0.8 \times \frac{1}{2} = 0.8 \times \_\_\_ = \_\_\_$$

$$\text{o, } \_\_ \times \frac{1}{2} = \_\_ = \_\_$$

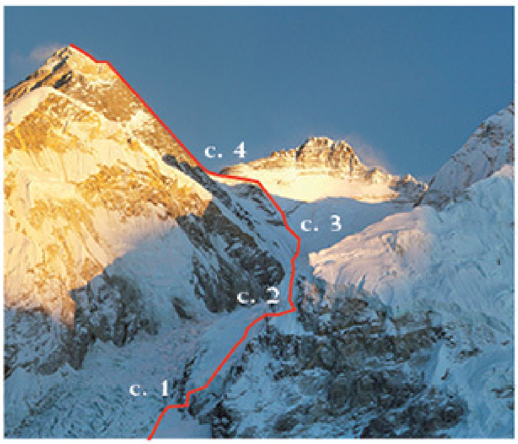
Describan el procedimiento que siguieron para obtener los valores de la tabla. Compártanlo con otros integrantes del grupo y validen sus resultados. ¿En qué casos es más conveniente multiplicar fracciones y en cuáles decimales?

III. **Identifico la representación más adecuada al resolver multiplicaciones de fracciones y números decimales.**

Estimar el resultado de una operación significa que hay que encontrar un número decimal finito cuyas primeras cifras coincidan con el número decimal que representa el valor real de dicho resultado. Cuantas más cifras coincidan, mejor es la aproximación, que se denota con "~".

1. Estima el resultado de las siguientes multiplicaciones.
   a. $2.3 \times \frac{3}{2} \sim$ _____
   b. $\frac{6}{7} \times 0.65 \sim$ _____
   c. $0.7 \times \frac{8}{9} \sim$ _____
   d. $6.04 \times 1\frac{3}{5} \sim$ _____
   e. $\frac{7}{6} \times 2.46 \sim$ _____
   f. $\frac{8}{9} \times 0.9 \sim$ _____
   g. $3.16 \times 2\frac{2}{3} \sim$ _____
   h. $\frac{5}{12} \times 0.6 \sim$ _____
2. Utiliza tu calculadora o una hoja electrónica de cálculo para verificar tus estimaciones y anota el resultado; utiliza el tipo de números más adecuado.
3. Resuelve, en pareja, los siguientes problemas.
   a. En el año 2015 el número de habitantes en México era de 119.5 millones, de los cuales aproximadamente $\frac{3}{11}$ constituyen la población menor de 15 años y $\frac{13}{20}$ representan la población de 15 a 64 años.
      - ¿Aproximadamente cuántos millones de personas son menores de 15 años?
      - ¿Cuántos millones de personas tienen entre 15 y 64 años?
      - Si alrededor de $\frac{8}{10}$ de la población vive en zonas urbanas, ¿cuántos habitantes viven en estas zonas?

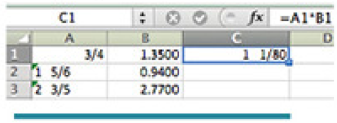
   b. La imagen muestra una ruta de ascenso para llegar a la cima del Everest, que está a 8.84 km sobre el nivel del mar. El ascenso se inicia en el campamento base y a 5.4 km de altura; se recorren 3.44 km para llegar a la cima. En la ruta hay cuatro campamentos; el primero se encuentra a $\frac{1}{6}$, considerando la distancia entre el campamento base y la cima; el campamento 2 está a $\frac{2}{5}$; el 3, a $\frac{1}{2}$ y el 4, a $\frac{7}{8}$.
   Anota la distancia que hay que recorrer, desde el campamento base, para llegar a cada campamento.
   Campamento 1: ________ Campamento 2: ________
   Campamento 3: ________ Campamento 4: ________




Comparen sus estimaciones y los resultados de los problemas con otros compañeros. Validen sus estrategias. ¿En qué casos representaron los resultados como fracción y en cuáles como número decimal? ¿Qué criterio siguieron para determinarlo? Compartan sus conclusiones.

**Utilizo las TIC**

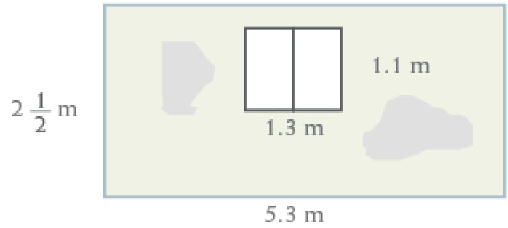
Para multiplicar fracciones y números decimales, abre un archivo en una hoja de cálculo electrónica, en la ventana "Formato", da formato de fracción a las celdas de la columna A y de la C; escribe diferentes fracciones en las celdas de la columna A y, en la columna B escribe números decimales; en la C escribe la multiplicación correspondiente , por ejemplo: =A1*B1 y da enter, para comprobar tus resultados. Observa el ejemplo:



## IV. Resuelvo problemas que incluyen operaciones combinadas con fracciones y números decimales.

1. Comenten en equipo la estrategia para resolver cada problema y respondan.

a. Emiliano sabe que necesita $\frac{3}{5}$ de litro de pintura por cada metro cuadrado de superficie y que es necesario aplicar dos capas de pintura a toda la superficie de la siguiente pared..




- Sin considerar el espacio que ocupa la ventana, ¿cuántos litros de pintura necesita Emiliano para pintar la pared?
- ¿Qué operaciones realizaron para resolver el problema?

b. La maestra de Andrea planteó el siguiente problema a sus alumnos.

"Marcela compró en la mercería listones y moños para decorar unos arreglos florales. Adquirió $3\frac{1}{2}$ m de listón azul, $2\frac{3}{4}$ m de listón rosa, $4\frac{1}{4}$ m de listón amarillo, y $\frac{1}{3}$ de una caja de moños. El metro de listón cuesta \$3.40 y la caja de moños, \$16.20. ¿Cuánto pagó en total Marcela?

Para resolver el problema, tres equipos propusieron los siguientes procedimientos:

Equipo 1: $3.4\,(\frac{7}{2} + \frac{11}{4} + \frac{17}{4}) + \frac{1}{3} \times 16.2$

Equipo 2: $3\frac{1}{2} \times 3.4 + 2\frac{3}{4} \times 3.4 + 4\frac{1}{4} \times 3.4 + \frac{1}{3} \times 16.2$

Equipo 3: $3.4 \times 3\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} + 4\frac{1}{4} + (\frac{1}{3} \times 16.2)$

- ¿Están de acuerdo con los tres procedimientos? Expliquen su respuesta.
- ¿Qué hizo el equipo 1?

Resuelvan el problema siguiendo los tres procedimientos.

- ¿Cuál es el resultado correcto del problema? ____________________________

Compartan sus respuestas con las de otros compañeros. ¿Hay otra manera de calcular lo que gastó Marcela? Discutan las preguntas con otros integrantes de grupo y registren sus conclusiones.

### Tomo Nota

Recuerda que al resolver operaciones combinadas, la jerarquía de operaciones indica el ____________ en que éstas deben realizarse.
Los ____________ permiten agrupar operaciones e indican que las operaciones que están ____________ de ellos se resuelven primero.

## V. Resuelvo operaciones combinadas que incluyen fracciones y números decimales.

1. Resuelve las siguientes operaciones:

a. $2.7 + \frac{3}{8} \times 16.2 =$ ______

b. $\frac{5}{6} \times 2.7 - \frac{1}{4} =$ ______

c. $3\,(\frac{1}{3} \times 0.9 + \frac{7}{5} \times 4) =$ ______

d. $(\frac{5}{8} + \frac{7}{4}) \times 2.8 =$ ______

2. Elige una de las operaciones anteriores e inventa un problema que se pueda resolver con ella.

Valida tus resultados con la calculadora. Si alguno es incorrecto, verifica tu procedimiento con la idea de detectar dónde sucedió el error y corrige. Intercambia tu problema con una pareja para verificar que pueda resolverse con las operaciones correspondientes.

### Practico

1. Marcelo tiene un terreno que mide 18.4 m de largo por 12.6 m de ancho, del cual decidió vender $\frac{3}{8}$ partes y quedarse con el resto.
   - ¿Cuántos metros cuadrados del terreno vendió?

2. Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a. $\frac{2}{3} \times 1.7 =$ ____ b. $8.32 \times \frac{11}{8} =$ ____ c. $0.65 \times \frac{2}{7} =$ ____ d. $\frac{1}{3} \times 8.6 =$ ____

3. Alfredo es panadero y para hacer pan blanco o bolillo, por cada kilo de harina utiliza 0.65 litros de agua, 0.03 kg de sal y 0.02 kg de levadura. Con estas cantidades se producen 1.25 kg de pan blanco.
   Completa la tabla a partir de la información anterior, considerando las cantidades de harina que se muestran.

| | Cantidades para diferentes porciones | | |
|---|---|---|---|
| Harina (kg) | $\frac{7}{8}$ | $2\frac{3}{4}$ | $3\frac{1}{2}$ |
| Agua (L) | | | |
| Sal (kg) | | | |
| Levadura (kg) | | | |
| Cantidad de pan (kg) | | | |

4. Una camioneta transporta 1.8 toneladas de arena. A su primer cliente le entregaron $\frac{2}{5}$ de la carga, al segundo $\frac{1}{4}$ y el resto fue entregado al último cliente.
   - ¿Qué cantidad de arena le entregaron al último cliente?
   - ¿Cuántas toneladas recibió el segundo cliente?

L2

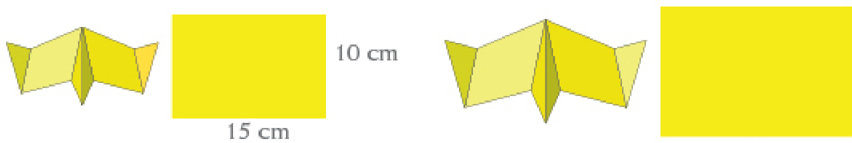
# División de fracciones

**Exploro**

## Resuelvo problemas de reparto y de figuras a escala.

El **origami** o **papiroflexia**, como se le conoce en México, es el arte de origen japonés que consiste en crear figuras y formas decorativas mediante el doblado de papel, como se muestra enseguida:

Elisa da clases de papiroflexia a niños en una comunidad de escasos recursos. Para la elaboración de las figuras, corta y entrega partes de una hoja a los niños. Dos de éstos hicieron la misma figura con las siguientes hojas:




- ¿Qué relación hay entre las medidas de las hojas?
- ¿Por qué fracción se multiplican las medidas de la hoja chica para obtener las medidas de la hoja grande?
- ¿Cómo se pueden obtener las medidas de la hoja chica a partir de las medidas de la hoja grande?

**Leo +**

Ingresa a cmed.mx/m22 para leer más sobre la historia del *Origami*.

Para la clase de hoy, Elisa dio $1\frac{1}{4}$ de hoja de papel a cada niño para elaborar una figura.

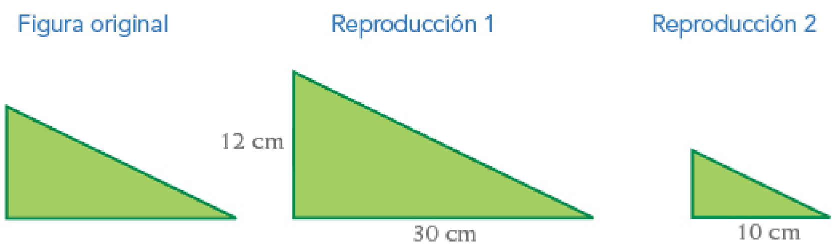
- Si repartió las hojas entre 7 niños, ¿cuántas hojas repartió en total?
- Para la elaboración de otra figura, entregó a cada niño $\frac{3}{4}$ de hoja. Si repartió $10\frac{1}{2}$ hojas en total, ¿cuántos niños elaboraron esa figura?
- ¿Qué hiciste para determinarlo?

Compara tus resultados y procedimientos con los de otro integrante del grupo. Discutan las siguientes preguntas: ¿Cómo supieron entre cuántos niños repartió Elisa las $10\frac{1}{2}$ hojas? ¿Qué operación permite hacer un reparto? ¿Qué operación con números decimales permite responder la última pregunta? Registren sus conclusiones.

Descubro y construyo

## I. Aplico factores de proporcionalidad de manera sucesiva en figuras a escala.

1. Analiza, en pareja, las siguientes figuras y resuelvan.



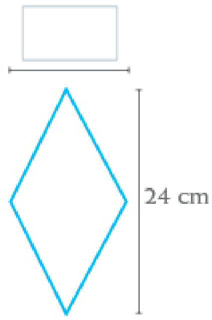

Al triángulo original se le aplicaron de manera consecutiva dos **factores de proporcionalidad** para obtener las reproducciones a **escala** que se muestran. Para la reproducción 1 se aplicó un factor de proporcionalidad igual a 2 y para la **reproducción 2**, se aplicó a la **reproducción 1** un factor de proporcionalidad igual a $\frac{1}{3}$.

- ¿Cuál es el factor de proporcionalidad entre la figura original y la **reproducción 2**? ¿Cómo lo determinaron?

Para obtener la medida de la base de la figura original, Mariana dice que se multiplica 30 por $\frac{1}{2}$ y Mateo dice que se divide 30 entre 2.

- ¿Cuál de los procedimientos es correcto? Argumenten sus respuestas.
- ¿Cuánto mide la base de la figura original?
- ¿Cuánto mide de altura la **reproducción 2**? Expliquen cómo la obtuvieron.
- ¿Cuál es la altura de la figura original?

2. Lean la información y completen la tabla.
Un rombo se reprodujo a escala dos veces de manera consecutiva, se aplicó un factor de proporcionalidad de $\frac{1}{5}$ a la **reproducción 1** y a ésta se le aplicó un factor de 4 para obtener la **reproducción 2**.




| Figura | Diagonal mayor (cm) | Diagonal menor (cm) |
|---|---|---|
| Original | 24 | |
| Reproducción 1 | | $3\frac{1}{5}$ |
| Reproducción 2 | | |

- ¿Cuál es el factor de proporcionalidad entre la figura original y la **reproducción 2**?

Comparen sus resultados y estrategias de solución con otras parejas. ¿Por qué número se multiplican los valores de la **reproducción 2** para obtener los de la figura original? Si dividen un número entre 4, ¿qué multiplicación permite obtener el mismo resultado? ¿Qué relación hay entre 4 y dicho número?

**GLOSARIO**

**Factor de proporcionalidad.** Número por el cual se multiplica un conjunto de números para obtener los valores de otro conjunto.

**Escala.** Relación que existe entre las dimensiones de una figura original y las de su reproducción.

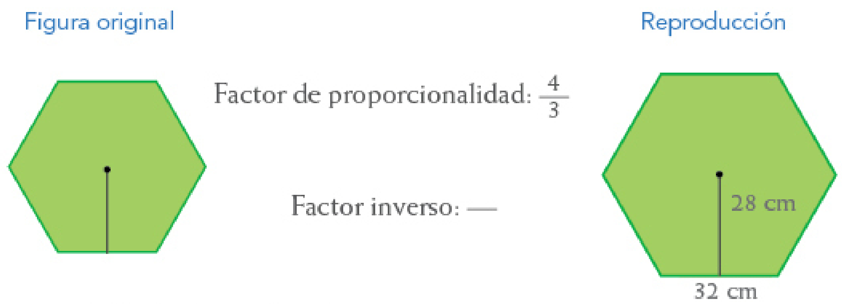
**II. Resuelvo problemas de proporcionalidad aplicando el factor inverso o recíproco.**

En una relación de proporcionalidad directa, se conoce como **factor inverso de proporcionalidad**, o **recíproco**, al número por el cual se multiplica la **variable dependiente** para obtener el valor de la respectiva **variable independiente**. El factor inverso o recíproco del factor $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

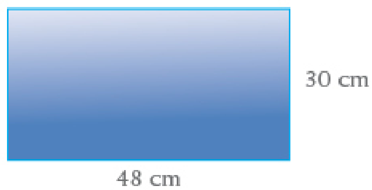
1. Determinen el factor inverso en las relaciones de la tabla, como fracción simplificada.

| Medidas de la figura original (cm) | Medidas de la reproducción (cm) | Factor inverso (cm) |
|---|---|---|
| 8 | 18 | |
| 35 | 49 | |

2. Obtengan el factor inverso y calculen las medidas de la figura original.




3. Observen el siguiente rectángulo y respondan.




- Si al rectángulo le aplican un factor de proporcionalidad de $\frac{1}{6}$, ¿cuáles son las medidas de su reproducción?
- ¿Qué divisiones permiten obtener las medidas de la reproducción?
- ¿Qué relación hay entre el factor de proporcionalidad $\frac{1}{6}$ y el divisor anterior?
- A partir de lo anterior, ¿se podría afirmar que multiplicar por $\frac{1}{6}$ es igual a dividir entre 6? ¿Por qué?

Escriban un ejemplo que valide su respuesta.

- ¿Qué relación hay entre multiplicar por $\frac{1}{4}$ y dividir entre 4?
- ¿Por qué se puede afirmar que $\frac{1}{4}$ y 4 son números recíprocos?
- Si un número se divide entre $\frac{3}{5}$, ¿por qué número se puede multiplicar el cociente para comprobar la respuesta? Expliquen.

Compartan sus procedimientos con los de otros compañeros y validen sus resultados. Analicen y discutan en qué casos una multiplicación permite obtener el mismo resultado de una división. Registren sus conclusiones.

**GLOSARIO**

**Variable dependiente.** Es aquella cuyo valor depende del valor numérico que adquiera la variable independiente.

**Variable independiente.** Es aquella que puede adquirir o cambiar de valor sin verse afectada por otra variable.

## Tomo Nota

Un número $a$ es recíproco de otro si se cumple que al multiplicarse entre sí, el resultado es igual a ______, es decir, $a \times \frac{1}{a} =$ __ cuando $a$ es diferente de cero, es decir, $a \neq 0$.

## III. Resuelvo problemas de proporcionalidad con factores fraccionarios, por medio de multiplicaciones y divisiones.

1. Resuelvan los siguientes problemas reunidos en equipo.

   En una bodega de frutas, por cada kilogramo de manzanas hay 3 kg de peras.
   - ¿Qué multiplicación permite saber cuántos kilogramos de pera hay por cada 35 kg de manzanas?
   - Si hay 126 kg de peras, ¿qué operación permite saber cuántos kilogramos de manzanas hay?

   En la misma bodega, por cada kilogramo de mango hay $\frac{3}{5}$ de kg de duraznos.
   - ¿Cuántos kilogramos de duraznos hay si se tienen 8 kg de mangos?
   - ¿Cómo lo determinaron?

   Para calcular cuántos kilogramos de mango hay si tienen 15 kg de duraznos, Ernesto dice que se debe dividir 15 entre $\frac{3}{5}$.
   - Discutan si es posible resolver la división que propone Ernesto por medio de una multiplicación.
   - ¿Cuántos kilogramos de mango hay por cada 15 kg de mangos? ¿Cómo obtuvieron la respuesta?

2. Completen las siguientes tablas de proporcionalidad.

   a. Una alberca se llena a razón de $\frac{3}{4}$ de m³ cada minuto.

| Tiempo (min) | $\frac{1}{2}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Agua en la alberca ($m^3$) | | $1\frac{1}{2}$ | $5\frac{3}{4}$ | $7\frac{1}{2}$ | 20 |

   - ¿Qué hicieron para calcular el tiempo, según la cantidad de agua?
   - Si la alberca tiene una capacidad de $115\frac{1}{2}$ $m^3$, ¿en cuántas horas se llenará?

   b. Como vieron en la lección anterior, la densidad del petróleo es de $\frac{4}{5}$ kg por litro o $dm^3$.

| Capacidad (Litros de petróleo) | 4 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Masa (kg) | | $6\frac{3}{5}$ | 12 | $15\frac{1}{2}$ | 24 |

   - Si un barril de petróleo lleno tiene una masa de $127\frac{1}{5}$ kg, ¿cuántos litros contiene un barril?

Comparen sus resultados y estrategias de solución con otros compañeros. ¿Qué procedimiento permite obtener el resultado de una división en la que el divisor es una fracción?

### Tomo Nota

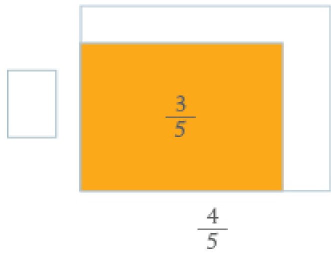
Dividir una cantidad $n$ entre $m$ es lo mismo que multiplicar ___ por ____, ya que la operación inversa de la división es la __________.

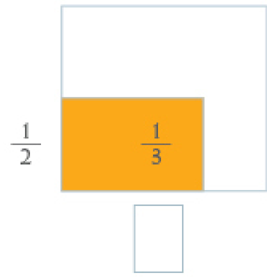
Por ello, dividir entre un número $\frac{n}{m}$ es lo mismo que multiplicar por su ______________, es decir, por ______.

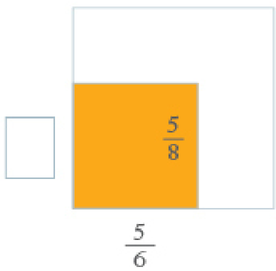
## IV. Resuelvo problemas en los que hay que calcular un factor de una multiplicación.

Recuerda que cuando se conoce el área de un rectángulo y la medida de uno de sus lados, la división: "área entre medida conocida" permite obtener la medida faltante.

1. Considera la información anterior, analiza el área de color de las figuras y resuelve.




- ¿Qué divisiones permiten conocer la medida que falta en cada figura?

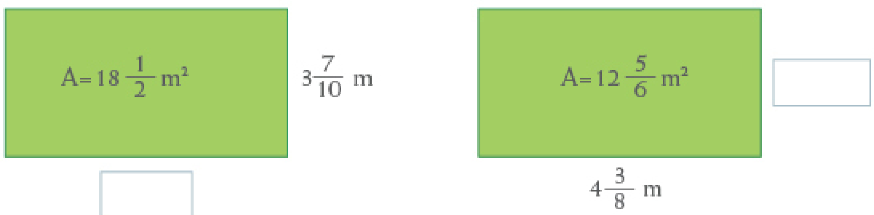
Multiplica el área de cada figura por el recíproco de la medida conocida.

- ¿Qué fracciones obtuviste? ¿Qué relación tienen con las medidas de cada figura?

Anota las medidas faltantes en las figuras. Después, multiplica para validar que las medidas correspondan al área de las figuras.

- Si de un cuadrado de área 1 se utilizan $\frac{5}{8}$ y de un lado se cortan $\frac{5}{6}$, como muestra la figura de la izquierda, ¿qué fracción se cortó del otro lado?

2. Calcula la medida que falta en los siguientes terrenos.




- Describe el procedimiento que seguiste para calcular la medida faltante.

3. Anota las fracciones simplificadas que faltan en las siguientes multiplicaciones.

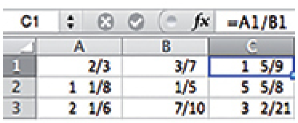
**a.** $\frac{8}{5} \times \underline{\quad} = \frac{24}{35}$ **b.** $\frac{4}{9} \times \underline{\quad} = \frac{5}{9}$ **c.** $\frac{7}{6} \times \underline{\quad} = \frac{7}{4}$

Compara tus respuestas con otros compañeros. En caso de que existan diferencias, discutan en busca de llegar a acuerdos. Describan un procedimiento para dividir dos fracciones en función de sus numeradores y denominadores.

**Utilizo las TIC**

Verifica si tu calculadora opera con fracciones y resuelve las operaciones de las lecciones para validar tus resultados.

O bien, en una hoja de cálculo electrónica da formato de fracción a las celdas de las columnas A y B. En la columna A escribe los dividendos, en la columna B los divisores y en la columna C la fórmula para resolverlas:


C1 fx =A1/B1

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 2/3 | 3/7 | 1 5/9 |
| 2 | 1 1/8 | 1/5 | 5 5/8 |
| 3 | 2 1/6 | 7/10 | 3 2/21 |

## V. Resuelvo operaciones y problemas de división de fracciones.

1. Resuelve las siguientes operaciones.

a. $\frac{7}{8} \div \frac{5}{6} =$

b. $2\frac{1}{4} \div \frac{3}{8} =$

c. $\frac{10}{6} \div \frac{1}{3} =$

d. $4\frac{2}{3} \div \frac{8}{9} =$

2. Encuentra la respuesta correcta en cada problema.

- Una pieza de jamón de $3\frac{3}{4}$ kg se divide en empaques de $\frac{3}{8}$ kg. ¿Cuántos empaques se hicieron?
- Brenda repartió un garrafón de agua que contenía $7\frac{1}{2}$ L de jugo en vasos de $\frac{5}{6}$ de L de capacidad. ¿Cuántos vasos llenó?
- De una pieza de plata de $3\frac{6}{10}$ onzas se hicieron pequeñas piezas de $\frac{3}{5}$ de onza. ¿Cuántas piezas se obtuvieron en total?

Valida tus resultados con los de otros compañeros. Comenten en grupo los procedimientos vistos a lo largo de la lección para resolver divisiones de fracciones. Comenten en grupo sobre situaciones que se puedan resolver mediante la división de fracciones.

### Tomo Nota

Para dividir dos fracciones, por ejemplo $\frac{3}{8} \div \frac{4}{6}$, se multiplica ___ × ___ y después ___ × ___.
El cociente es igual a:

$$\frac{\textit{Producto de la primera operación}}{\textit{Producto de la segunda operación}}$$

## Practico

1. Carlos trazó un rectángulo a escala que mide 25 cm de base por 10 cm de altura. Si la figura original mide 15 cm de base y 6 cm de altura, ¿cuál es el factor inverso de proporcionalidad?

2. Pablo fotocopió un dibujo a $\frac{5}{4}$ de su tamaño original. Si la altura del dibujo mide 20 cm en la fotocopia, ¿cuál es la altura del dibujo original?

3. Para reforzar las patas de una silla, José las pegó y amarró con un lazo. Si en cada vuelta usa $\frac{4}{5}$ de m de lazo y el lazo mide $3\frac{1}{2}$ m, ¿cuántas vueltas le dio a la silla?

4. El área de un triángulo rectángulo mide $4\frac{2}{5}$ $u^2$ y su base $2\frac{2}{3}$ u. ¿Cuál es la medida de su altura?

5. Un automóvil recorre en carretera $12\frac{3}{4}$ km por cada litro de gasolina. Si en un viaje recorre 85 km, ¿cuántos litros de gasolina consume?

### Utilizo las TIC

Ingresa al sitio de Internet: cmed.mx/m23 y resuelve los problemas verbales de dividir fracciones.

# Recapitulo

1. Para multiplicar un número decimal por una fracción, se puede operar con fracciones o decimales. Si una fracción no tiene una representación finita como número decimal, conviene operar con fracciones.
2. Para resolver operaciones combinadas que incluyan fracciones y números decimales, se sigue la misma jerarquía de las operaciones con números enteros.
3. Los paréntesis permiten agrupar operaciones e indican que primero se resuelven las operaciones que están dentro de ellos.
4. El factor inverso de proporcionalidad es el número por el cual se multiplican los valores del conjunto dependiente para obtener los del conjunto independiente.
5. Un número es recíproco de otro si al multiplicarse entre sí, el resultado es igual a uno.
6. Para resolver una división de fracciones, se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Resuelve las siguientes operaciones.

a. $4.3 \times \frac{5}{4} =$

b. $0.7 + 3.1 \times \frac{8}{9} =$

c. $\frac{11}{6} \times 2.08 =$

d. $(2.4 + \frac{3}{5}) \times 1\frac{4}{9} + 3 =$

**2.** Completa las multiplicaciones.

a. $\frac{1}{4} \times$ ___ $= 1$

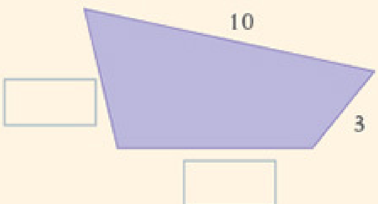
b. $1\frac{3}{5} \times$ — $= 1$

c. — $\times \frac{7}{9} = 1$

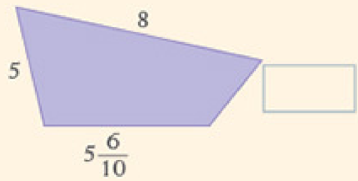
d. — $\times 4\frac{1}{2} = 1$

**3.** Escribe las medidas que faltan en las siguientes figuras a escala.

Figura original




Reproducción a escala




**4.** Responde.

a. Si multiplico un número por $\frac{9}{7}$ y el resultado es $2\frac{2}{35}$, ¿cuál es ese número?

b. El producto de una multiplicación es $2\frac{5}{8}$ Si un factor es $\frac{7}{3}$, ¿cuál es el otro factor?

c. Si el área de un rectángulo mide $24\frac{1}{2}$ cm² y su altura mide $4\frac{2}{3}$ cm, ¿cuánto mide su base?

**5.** Completa la siguiente que muestra el contenido de diferente número de envases cuya capacidad es de $\frac{7}{8}$ de litro.

| Número de envases | 1 | | | |
|---|---|---|---|---|
| Capacidad (L) | $\frac{7}{8}$ | $3\frac{3}{20}$ | $4\frac{3}{8}$ | $6\frac{9}{16}$ |

**6.** Elige los problemas que se resuelven por medio de una división de fracciones y resuélvelos.

a. Medio kilogramo de cacahuates se reparte en porciones iguales de $\frac{1}{6}$ de kg. ¿Cuántas porciones se obtuvieron?

b. Mateo destina $\frac{1}{5}$ de su sueldo en gastos personales. Si divide esa cantidad en tres partes y $\frac{1}{3}$ lo gasta en comida, ¿a qué parte de su sueldo corresponde?

c. Una tabla de $4\frac{3}{4}$ m se corta en tramos de $\frac{3}{10}$ de m. ¿Cuántos tramos se obtienen y cuánto sobra?

# Logro ir **más allá**

1. Lee el siguiente fragmento de *Alicia en el país de las maravillas* de Lewis Carrol y resuelve.

Durante uno de sus viajes "Alicia regresa con una botella de bebida que la hacía más pequeña y otra cuyo contenido la hacía más grande. Al principio tomaba ambos líquidos al tanteo hasta que llegaba al tamaño que quería pero desperdiciaba alimentos, por lo que buscó una regla que le dijera cuánto crece o se achica según la cantidad de líquido que toma".

Alicia mide $1\frac{1}{10}$ m; bebió 9 mL de la bebida y se achicó hasta medir $\frac{95}{100}$ m, luego tomó $5\frac{1}{2}$ mL del líquido que la agrandaba y creció $\frac{33}{100}$ m.

- ¿De qué altura quedó Alicia?
- Si después toma 5 mL de cada líquido, ¿cuántos metros crece o se achica?
- ¿Cuál sería su estatura en ese momento?

Describe qué hiciste para responder.

2. Completa,en pareja, las siguientes tablas.

| Cantidad de líquido que bebe (mL) | | | |
|---|---|---|---|
| Metros que se reduce | $\frac{5}{24}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{27}{80}$ |

| Cantidad de líquido que bebe (mL) | | | |
|---|---|---|---|
| Metros que crece | $\frac{7}{50}$ | $\frac{51}{100}$ | $\frac{3}{5}$ |

L3

# Multiplicación de números positivos y negativos

Los **números negativos** son números menores que cero, se identifican con el signo (–), por ejemplo –4, –1.5, $-\frac{3}{4}$, y pueden interpretarse como pérdida, retroceso, descenso, eliminación, etc. Los números positivos son mayores que cero y se identifican con el signo (+), aunque éste se omite; dichos números tienen un sentido de ganancia, avance, ascenso, agregación, etcétera.

Exploro

## Resuelvo problemas que incluyen números positivos y negativos.

1. A partir de la información anterior, resuelve las siguientes situaciones. Utiliza números positivos y negativos para representar las respuestas.

   **a.** En una ciudad la temperatura varía de manera constante –3 °C cada hora, durante cuatro horas consecutivas.

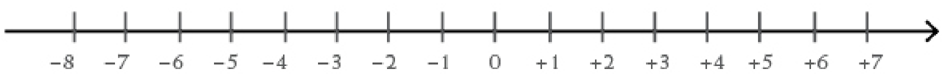
   - Si la temperatura original era de 5 °C, ¿cuál fue la temperatura final?
   - ¿Qué hiciste para determinarlo?

   **b.** El equipo de Martín se encuentra en una mala racha; ha perdido tres partidos de manera consecutiva, todos por el mismo marcador: 1–3.

   - ¿Cuál fue la diferencia de goles del equipo de Martín en esos partidos? Explica tu respuesta. ______________________________

2. Representa las situaciones anteriores en la recta numérica.

   **a.** Señala la temperatura después de cada hora.
   **b.** Muestra la diferencia de goles del equipo de Martín después de cada partido.




Compara tus resultados con los de otros integrantes del grupo. Comenten cuál fue la estrategia que cada quien siguió para responder. ¿Es posible resolver los problemas por medio de una multiplicación de números positivos y negativos? ¿Qué cantidades intervienen en cada caso? ¿Cuál es el signo del resultado? Compartan sus respuestas y registren sus conclusiones.

## Descubro y construyo

**I. Resuelvo multiplicaciones de números positivos y negativos con apoyo de la suma repetida (iterada).**

1. Lean la información y resuelvan en parejas.

Inés tiene su dinero invertido en la bolsa de valores, la cual es un mercado de renta variable, por lo que los valores van cambiando tanto al alza como a la baja, es decir, el dinero invertido se incrementa o disminuye de acuerdo con los puntos que gane o pierda la bolsa.

Esta semana la bolsa perdió 0.8 puntos durante cinco días, es decir, tuvo una variación de –0.8 puntos diarios, lo cual implica que los valores de Inés cambiaron a la baja.

- ¿Cuántos puntos varió la bolsa después de 2 días? ¿Y después de 3 días?
- ¿Cuántos puntos varió después de cinco días?
- ¿Cómo obtuvieron la respuesta?
- Supongamos que la bolsa varía $-\frac{1}{2}$ punto durante 9 días consecutivos, ¿cuántos puntos se perderían en total?

2. Respondan lo siguiente.

- Si suman el número 8 cuatro veces consecutivas, ¿qué número obtienen? ¿Qué multiplicación representa esta suma?
- Si suman el número –6 tres veces consecutivas, ¿qué número obtienen? ¿Qué multiplicación representa esta suma?

3. Escriban el resultado de las sumas iteradas y la multiplicación equivalente.

a. Suma: $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 =$ _____ Multiplicación: ________________
b. Suma: $(-7) + (-7) + (-7) =$ _____ Multiplicación: ________________
c. Suma: $(-0.2) + (-0.2) + (-0.2) + (-0.2) =$ _____ Multiplicación: ________________
d. Suma: $(-\frac{3}{4}) + (-\frac{3}{4}) + (-\frac{3}{4}) + (-\frac{3}{4}) =$ _____ Multiplicación: ________________

- ¿Qué se observa de manera regular al resolver multiplicaciones de un número positivo y uno negativo?
- ¿Cambia la regularidad al operar con enteros, decimales o fracciones? ¿Por qué?

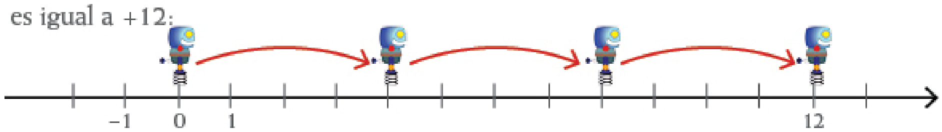
Comenten sus respuestas con otras parejas. En grupo discutan sobre la regularidad que observan en el producto o resultado al multiplicar dos números positivos y al multiplicar un número positivo y uno negativo. Registren sus conclusiones.

## II. Multiplico números positivos y negativos en la recta numérica.

1. Analicen en equipo la siguiente situación y resuelvan.

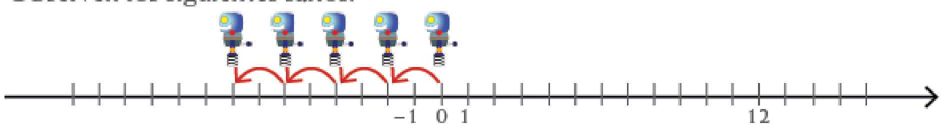
Un robot salta sobre una recta numérica, iniciando en el cero. Si mira hacia tu mano derecha, la longitud de cada salto se considerará con signo positivo, y si mira hacia tu mano izquierda, con signo negativo. Si salta de frente (es decir, en la dirección que está mirando), el número de saltos se considerará con signo positivo, y si salta de espaldas (es decir, en la dirección contraria a la que está mirando), el número de saltos se considerará con signo negativo. Observa las reglas del juego.

El siguiente ejemplo muestra 3 saltos de frente (+3), de 4 unidades, mirando hacia la derecha; es decir, cada salto vale (+4). Por tanto, tenemos (+3) veces (+4), que es igual a +12:




- ¿Qué multiplicación representa los saltos del robot?

2. Observen los siguientes saltos:

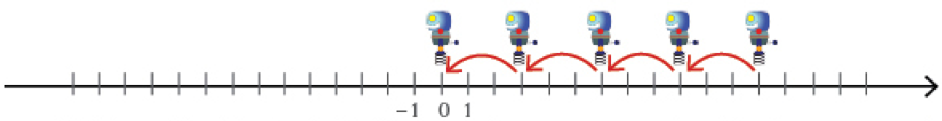



- ¿Cuántos saltos da el robot y en qué posición?
- ¿Con qué signo se representan estos saltos?
- ¿Por qué el valor de cada salto es –2?
- ¿A qué punto llegó el robot y qué multiplicación representa la situación?

3. Representen la siguiente situación en la recta anterior.
El robot mira hacia la derecha, da 2 saltos de espaldas de 5 unidades cada salto:

- ¿A qué casilla llega el robot? ¿Qué multiplicación representa los saltos del robot?

4. Observen los siguientes saltos del robot y su posición final.




- ¿Cuántos saltos dio el robot? ¿Con qué signo se representan? Expliquen por qué.
- ¿De cuántas unidades fueron los saltos y con qué signo se representa? Justifiquen la respuesta.
- ¿Qué multiplicación corresponde a estos saltos?

5. Resuelvan las siguientes multiplicaciones siguiendo las reglas del robot. Apóyense en una recta numérica.

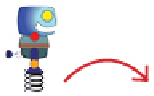
a. 5 × (–4) = ______ b. 6 × 7 = ______ c. –3 × 8 = ______ d. –9 × (–2) = ______

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Debatan sobre las regularidades que observan en el juego del robot al multiplicar números positivos y negativos.

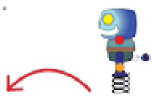
**Reglas del juego**

*Mira*: hacia la **derecha** o hacia la **izquierda**.
*Salta*: de **frente** (hacia donde mira) o de **espaldas** (al contrario de donde mira).

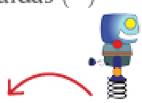
Mira hacia la derecha (+) y salta de frente (+)



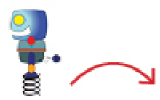
Mira hacia la izquierda (–) y salta de frente (+).



Mira hacia la derecha (+) y salta de espaldas (–)



Mira la izquierda (–) y salta de espaldas (–).



### Tomo Nota

Al resolver una multiplicación, el orden de los factores ________ el producto. Por ello, multiplicar 8 × (–7) es igual a multiplicar (____) × ___.

**III. Identifico las regularidades en sucesiones de multiplicaciones de números positivos y negativos.**

1. Completen, en pareja, las listas (sucesiones) que se generan con los resultados de las multiplicaciones.

   Consideren que al representar una multiplicación se puede omitir el signo (×) y sustituirse por paréntesis, es decir, $-8 \times 5 = (-8)(5)$.

| Sucesión 1 | Sucesión 2 |
|---|---|
| $(8)(+5) =$ ______ | $(-5)(8) =$ ______ |
| $(8)(+4) =$ ______ | $(-5)(7) =$ ______ |
| $(8)(+3) =$ ______ | $(-5)(6) =$ ______ |
| $(8)(+2) =$ ______ | $(-5)(5) =$ ______ |
| $(8)(+1) =$ ______ | $(-5)(4) =$ ______ |
| $(8)(0) =$ ______ | $(-5)(3) =$ ______ |
| $(8)(-1) =$ ______ | $(-5)(2) =$ ______ |
| $(8)(-2) =$ ______ | $(-5)(1) =$ ______ |
| $(8)(-3) =$ ______ | $(-5)(0) =$ ______ |
| $(8)(-4) =$ ______ | $(-5)(-1) =$ ______ |
| $(8)(-5) =$ ______ | $(-5)(-2) =$ ______ |

2. Analicen los resultados y respondan.

   - ¿Qué relaciones observas entre los números positivos y negativos que corresponden a los factores y el tipo de número del producto?
   - ¿Se repite la misma regularidad que en el juego del robot?
   - ¿Qué sucede con el producto al multiplicar un número positivo por uno negativo?
   - ¿Qué sucede al multiplicar dos números positivos o dos números negativos?

3. Retomen el juego del robot y representen los saltos con multiplicaciones.

   a. 3 saltos de frente, de 9 unidades, mirando hacia la izquierda:
   b. 8 saltos de espaldas, de 1.4 unidades, mirando hacia la izquierda:
   c. 5 saltos de espaldas, de $\frac{1}{2}$ unidad, mirando hacia la derecha:
   d. $4\frac{1}{2}$ saltos de espaldas, de 0.6 unidades, mirando hacia la izquierda:

Comparen sus resultados y estrategias de solución con otros compañeros. En grupo y con el apoyo del profesor, establezcan una regla para multiplicar números positivos y negativos. Registren sus conclusiones.

## IV. Resuelvo multiplicaciones de números positivos y negativos, enteros, decimales y fraccionarios

1. Completa las multiplicaciones.

a. $7.8 \times (-3.25) =$

b. $-\frac{8}{5} \times \frac{3}{7} =$

c. $-3.4 \times (-\frac{5}{6}) =$

d. $-\frac{4}{9} \times \frac{5}{4} =$

2. Escribe el resultado de las siguientes multiplicaciones. Considera que (P) representa un número positivo y que (N) representa un número negativo.

(P)(P) = _____ (N)(N) = _____ (N)(N)(P) = _____ (P)(N)(P) = _____

(N)(N)(N) = _____ (P)(P)(P) = _____ (N)(P)(P) = _____ (N)(P)(N) = _____

3. Elige el resultado de cada multiplicación a partir de las regularidades anteriores.

a. $(-7)(8)(3) =$ 168 | $-168$

b. $(1.4)(-\frac{1}{3})(-3) =$ 1.4 | $-1.4$

c. $(\frac{7}{4})(-\frac{3}{2})(\frac{4}{3}) =$ $3\frac{1}{2}$ | $-3\frac{1}{2}$

d. $(-7)(-9)(4) =$ 252 | $-252$

e. $(-0.6)(-1.2)(-4.5) =$ 3.24 | $-3.24$

**Utilizo las TIC**

Utiliza la tecla (+/–) de tu calculadora y resuelve las multiplicaciones de las actividades a partir del inciso 2.

O trabaja en una hoja de cálculo electrónica.

Compara tus respuestas con distintos miembros del grupo. En caso de que existan diferencias, debatan en busca de llegar a acuerdos y respondan. ¿Cuál es el resultado de una multiplicación cuando la cantidad de factores negativos es un número par? ¿Y cuando la cantidad de factores negativos es un número impar? ¿El orden de los factores determina si el producto es un número positivo o negativo? Escriban algunos ejemplos que validen su postura.

## V. Resuelvo operaciones de números positivos y negativos aplicando la jerarquía de operaciones.

1. Retomen, en pareja, el juego del robot.

Consideren que ahora el robot inicia sus saltos desde diferentes puntos de la recta numérica. Observen el ejemplo.

| Posición inicial | Saltos | Unidades por salto | Mirando hacia la… | Posición final |
|---|---|---|---|---|
| − 8 | 3 de frente | 5 | derecha | $-8 + 3 \times 5 = 7$ |
| 5 | 9 de espaldas | 4 | derecha | |
| − 12 | 8 de espaldas | 6 | izquierda | |
| 9 | 4 de frente | 7 | izquierda | |

### Tomo Nota

La regla o ley de los signos de la multiplicación señala que multiplicar:

(positivo)(positivo) = __________

(positivo)(negativo) = __________

(negativo)(positivo) = __________

(negativo)(negativo) = __________

2. Trabaja individualmente. Aplica la jerarquía de operaciones y resuelve. Escribe paso a paso el procedimiento.

a. $5(3 - 17 + 4)(-6) =$
b. $((9 - 6) -7) + (-5) \times 11 =$
c. $36 + 48 - (-13) \times 9 + 6 =$
d. $(6 \times (-11)) + (8 - 12 - 6 + 4) \times 3 - 1 =$

Valida tus resultados con los de otros compañeros. Comenten en grupo las leyes de los signos para multiplicar números positivos y negativos.

## Practico

1. Completa el siguiente cuadro de multiplicaciones.

| $\times$ | $+1$ | $-4$ | $-2.3$ | $-\frac{3}{8}$ |
|---|---|---|---|---|
| $+2$ | | | | |
| $+\frac{2}{3}$ | | | | |
| $-1.7$ | | | | |
| $-3$ | | | | |

2. Responde las siguientes preguntas.
   - ¿Por qué número tienes que multiplicar 8 para obtener su **simétrico**?
   - ¿Por qué número tienes que multiplicar –2.3 para obtener su simétrico?

3. Resuelve las adivinanzas numéricas.
   - Si multiplico un número por –6 y al resultado le sumo 3, obtengo –27; ¿de qué número se trata?
   - Pienso en un número y lo multiplico por –4. Si el resultado es igual a –72, ¿en qué número pensé?

4. Resuelve las multiplicaciones y simplifica los resultados.

a. $-2\frac{1}{4} \times \frac{8}{3} =$　　b. $4\frac{2}{3} \times (-\frac{9}{8}) =$

5. Resuelve. Utiliza números positivos y negativos.
   a. Roxana practica buceo y cierto día descendió en promedio –0.3 m por segundo. Si su descenso duró 2 minutos, ¿a qué distancia del nivel del mar se encuentra?
   b. En un negocio acumularon deudas, con cierto proveedor, por –$1 235 durante 8 semanas consecutivas. ¿Cuál es su estado financiero después de las 8 semanas?

### GLOSARIO

**Números simétricos.** Pareja de números que se encuentran a la misma distancia del cero, en lados opuestos (el número *a* es el simétrico de *–a*).

### Utilizo las TIC

Ingresa a la página: cmed.mx/m24, elige "Multiplicar", "Sencillo" y "Negativos" y resuelve los ejercicios. Cambia a "Triple" y eleva el nivel, según te vayas sintiendo.

L4

# División de números positivos y negativos

Las **tarjetas de crédito**, como su nombre lo dice, son instrumentos otorgados por los bancos a los usuarios para cubrir ciertas necesidades a partir de un crédito o préstamo. Los créditos deben pagarse en cierto tiempo, de acuerdo con las políticas establecidas por cada banco. Los bancos suelen usar números negativos para representar la deuda de los usuarios de tarjetas de crédito, empleando términos como "Saldo negativo". Se debe considerar que las tarjetas de crédito no constituyen un dinero extra, y por ello es importante su buen uso para tener finanzas sanas.

Exploro

## Resuelvo problemas que incluyen números positivos y negativos.

1. Analiza la información y resuelve. Utiliza números positivos o negativos para representar las respuestas.

   Manuel tiene una deuda en su tarjeta de crédito y fue al banco para negociarla. El saldo de Manuel es de –$5 400.00 y el banco le ofrece dos planes para liquidarlo.

   Plan A: Cubrir la deuda en 6 pagos mensuales fijos, agregando un interés mensual de 3% sobre el saldo inicial; es decir, se suman a la deuda –$162.00 por cada mes que dura el plazo.

   - ¿Qué operación de números positivos y negativos permite conocer la cantidad que se agregará a la deuda final de Manuel, considerando estos intereses?
   - ¿Cuál será el saldo total de Manuel?
   - ¿Qué cantidad abonará mensualmente a su deuda?
   - ¿Con qué operación obtuviste la respuesta?

   Plan B: Pagar un interés total de 20% sobre la deuda y abonar (pagar) mensualmente $720.00.

   - ¿Cuál será el saldo total de Manuel con este plan B?
   - ¿En cuántos meses liquidaría su deuda Manuel?
   - ¿Qué hiciste para determinarlo?

   Compara tus resultados y aclara tus dudas con otros compañeros. Debatan sobre la estrategia que cada quien siguió para responder. Si se usan números con signo, ¿qué operación permite saber los meses que tardará Manuel en pagar su deuda con el plan B? Discutan y registren sus conclusiones.

**Leo +**

Entra a esta página para saber cómo utilizar una tarjeta de crédito sin que su uso te ahogue en deudas.

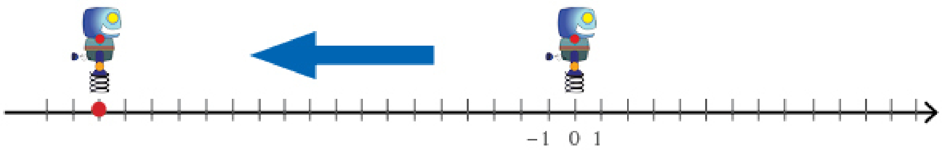
Comparte esta información con tus padres, ¡seguro te lo agradecerán!: cmed.mx/m25

Descubro y construyo

**I. Aplico la relación entre la multiplicación y la división para resolver problemas que incluyen números positivos y negativos.**

Retomen, en parejas, el juego del robot de la lección anterior y resuelvan. Recuerden —en el cuadro de la derecha— los movimientos que puede hacer el robot.

1. Consideren que el robot realizó 3 saltos del mismo tamaño, de espaldas, para llegar al punto que se muestra en la siguiente recta numérica:




- ¿A qué número llegó el robot?

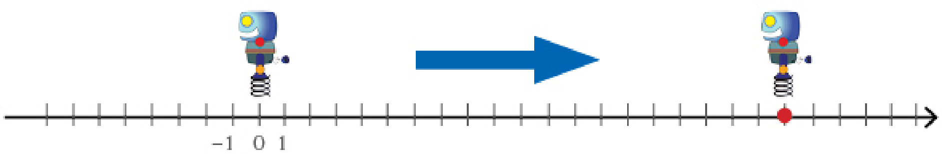
Como el robot saltó mirando hacia la derecha, el número de saltos debe considerarse con el signo más, es decir, (+3).

- ¿Qué operación permite conocer el número con signo del valor de cada salto del robot?
- ¿De cuántas unidades fue cada salto?
- Según las reglas del juego, ¿con qué tipo de número se deben considerar las unidades de cada salto? ¿Por qué?

Escriban la operación de números positivos y negativos cuyo resultado describa la situación.

2. Completen las siguientes expresiones a partir de la situación que muestra la recta y resuelvan. Usen números con signo:

El robot dio saltos de espaldas de 4 unidades:




Punto al que llegó el robot: ______ Valor de cada salto de espaldas: ______

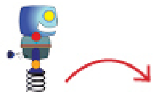
- ¿Cuántos saltos dio el robot y con qué signo deben representarse? Expliquen por qué.
- ¿Qué operación permite conocer el signo y el número de saltos, según la dirección hacia donde mira el robot?

3. De acuerdo con las reglas del juego, las operaciones que permiten resolver las situaciones anteriores son: $(+3) \times (x) = (-18)$ y $(y) \times (-4) = (+20)$; ¿es esto cierto? ¿Por qué?
   - De acuerdo con las reglas de los signos para la multiplicación, ¿cuánto valen $x$ y $y$ respectivamente?
4. Verifiquen sus respuestas.

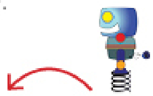
**Reglas del juego**

*Mira*: hacia la **derecha** o hacia la **izquierda**. *Salta*: de **frente** (hacia donde mira) o de **espaldas** (al contrario de donde mira).

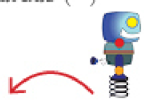
Mira hacia la derecha (+) y salta de frente (+)



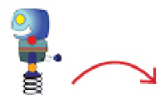
Mira hacia la izquierda (−) y salta de frente (+).



Mira hacia la derecha (+) y salta de espaldas (−)



Mira la izquierda (−) y salta de espaldas (−).



5. Consideren nuevamente el juego del robot y resuelvan la multiplicación que corresponde a cada situación; escriban la división que permite comprobar o encontrar el resultado y completen las tablas. Observen el ejemplo:

| Saltos... | Mirando hacia... (valor) | Punto al que llega |
|---|---|---|
| 4 de frente (+4) | la derecha (+8) | 32 |

a. Multiplicación: 4 × 8 = 32 División: 32 ÷ 8 = _____

| Saltos... | Mirando hacia... (valor) | Punto al que llega |
|---|---|---|
| | la derecha (+7) | –35 |

b. Multiplicación: (____) × (+7) = (–35) División: –35 ÷ 7 = (____)

| Saltos... | Mirando hacia... (valor) | Punto al que llega |
|---|---|---|
| | la izquierda (–9) | –54 |

c. Multiplicación: (____) × (–9) = (–54) División: (–54) ÷ (–9) = (____)

| Saltos... | Mirando hacia... (valor) | Punto al que llega |
|---|---|---|
| | la izquierda (–7) | 21 |

d. Multiplicación: (____) × ( –7 ) = (21) División: 21 ÷ ( –7 ) = ______

| Saltos... | Mirando hacia... (valor) | Punto al que llega |
|---|---|---|
| 12 de frente (+12) | | –72 |

e. Multiplicación: (+12) × (____) = (–72) División: (–72) ÷ ( ____) = 12

6. Respondan, y comprueben sus respuestas con una multiplicación.

- Si el robot da x saltos de (–8) unidades, es decir mirando la izquierda, y llega al número –16, ¿cuántos saltos dio y hacia dónde?
- El robot dio 6 saltos de espaldas (–6) y llegó al número 30; ¿de cuántas unidades dio los saltos y que signo les corresponde? Justifiquen su respuesta.
- Si el robot da 7 saltos de espaldas (–7) y llega al número 42, ¿sería cierto que los saltos fueron de 6 unidades, mirando hacia la derecha (+6)? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas con las de otros integrantes de grupo. Discutan sobre las regularidades que observan en el juego del robot al dividir números positivos y negativos, y comprueben si se cumplen las mismas reglas que con la multiplicación.

### Tomo Nota

La multiplicación y la división son operaciones ____________ porque una nos permite comprobar el resultado de la otra. Por ejemplo, para comprobar el resultado de una división se tiene que: ____________ × ____________ = dividendo.

## II. Resuelvo divisiones de números positivos y negativos y compruebo los resultados con una multiplicación.

1. Completa las listas (sucesiones) que se generan con los cocientes de las divisiones.

| Sucesión 1 | Sucesión 2 |
|---|---|
| $28 \div 7 =$ ______ | $28 \div (-7) =$ ______ |
| $21 \div 7 =$ ______ | $21 \div (-7) =$ ______ |
| $14 \div 7 =$ ______ | $14 \div (-7) =$ ______ |
| $7 \div 7 =$ ______ | $7 \div (-7) =$ ______ |
| $-7 \div 7 =$ ______ | $-7 \div (-7) =$ ______ |
| $-14 \div 7 =$ ______ | $-14 \div (-7) =$ ______ |
| $-21 \div 7 =$ ______ | $-21 \div (-7) =$ ______ |
| $-28 \div 7 =$ ______ | $-28 \div (-7) =$ ______ |

2. Responde.

- Si se multiplica un número por $-8$, el resultado es $-152$. ¿Qué división permite encontrar el número que falta? ¿Cuál es ese número?
- Un número multiplicado por $-3.5$ es igual a 49. ¿De qué número se trata?
- ¿Qué número multiplicado por $-\frac{3}{4}$ es igual a $-9$?

3. Resuelve las siguientes divisiones y comprueba los resultados con una multiplicación.

a. $144 \div 4.5 =$ ______ Multiplicación: ______ $\times 4.5 = 144$

b. $(-195) \div 13 =$ ______ Multiplicación: ______ $\times 13 = (-195)$

c. $14 \div \frac{1}{4} =$ ______ Multiplicación: ______ $\times \frac{1}{4} = 14$

d. $(-4.5) \div (-0.5) =$ ______ Multiplicación: ______ $\times (-0.5) = (-4.5)$

- ¿Qué regularidad observan al dividir un número negativo entre uno positivo y viceversa?
- ¿Qué regularidad observan al dividir dos números positivos o dos números negativos?

Comparen sus resultados y estrategias de solución con sus compañeros.
En grupo y con el apoyo del maestro, establezcan una regla para dividir números positivos y negativos.

### Tomo nota

La regla o ley de los signos de la división indica que:

positivo ÷ positivo = ______

positivo ÷ negativo = ______

negativo ÷ positivo = ______

negativo ÷ negativo = ______

**III. Resuelvo operaciones combinadas de multiplicación y división de números positivos y negativos.**

1. Anticipa si los resultados de las siguientes operaciones, son números positivos o negativos. Después, resuélvelas.

| Operación | Tipo de número del resultado | Resultado |
|---|---|---|
| $9 \times 8 \div (-6) =$ | | |
| $(-2.4) \times (\frac{-11.2}{7}) =$ | | |
| $-\frac{8}{5} \div \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} =$ | | |
| $-16 \div (-9.6 \div (-3)) =$ | | |
| $-\frac{12}{3} \div (\frac{4}{5} \times \frac{-1}{4}) =$ | | |
| $-0.8 \times \frac{4}{3} \div 1.35 =$ | | |

Compara tus respuestas con tus compañeros. Si existen diferencias en los resultados, argumenten sus procedimientos en busca de llegar a acuerdos; verifiquen que aplicaron correctamente el orden de las operaciones y la ley de los signos. Aclararen las diferencias.

**IV. Resuelvo operaciones de números positivos y negativos aplicando la jerarquía de operaciones.**

1. Resuelvan mentalmente las siguientes operaciones.

a. $-3 \times 18 \div 6 =$ ________

b. $(-42 + 14) \div (-7) =$ ________

c. $-90 \div (6 \times (-9) + 24) =$ ________

d. $-76 \div 4 + 5 =$ ________

e. $-80 \times 12 \div (-6) =$ ________

f. $-128 \div 4 \div 4 =$ ________

❖ Al producto de 5 por (–11) se le suma el resultado de dividir entre –12 la cantidad que se obtiene al realizar las siguientes operaciones: más doce, menos diez, menos ocho, más 24; después, a este resultado se le restan 100 y luego se multiplica todo lo anterior por 20. El resultado es 1540.

**Utilizo las TIC**

Utiliza la tecla (+/-) de tu calculadora científica y los paréntesis y resuelve las operaciones de las actividades de esta lección para comprobar tus resultados.

2. Sin resolver, elijan y subrayen, en pareja, la expresión que corresponda a la situación de la página anterior.

a. $[(5 \times (-11) + 12 - 10 - 8 + 24 \div (-12) - 100)] \times 20 =$ ________________

b. $5 \times [(-11) + (12 - 10 - 8 + 24) \div (-12) - 100] \times 20 =$ ________________

c. $[5 \times (-11) + (12 - 10 - 8 + 24) \div (-12) - 100)] \times 20 =$ ________________

d. $5 \times (-11) + 12 - 10 - 8 + 24 \div (-12) - 100 \times 20 =$ ________________

3. Ahora, resuelvan las operaciones anteriores para validar su elección.

Validen sus resultados con los de otros integrantes del grupo.

## Practico

1. Completa el siguiente cuadro de divisiones.

| | | Divisor | | |
|---|---|---|---|---|
| | ÷ | $-1$ | $-\frac{5}{8}$ | 2.5 |
| Dividendo | $+5$ | | | |
| | $+\frac{21}{6}$ | | | |
| | $-8.2$ | | | |

2. Responde.
   - ¿Por qué número tienes que multiplicar 8 para obtener –176?
   - ¿Por qué número tienes que multiplicar –2.3 para obtener 7.82?
   - Si divido un número entre 9 y al resultado le sumo 3 y obtengo –123, ¿de qué número se trata?
   - Un número se suma a 8 y el resultado se multiplica por –6. Si se obtiene 42, ¿de qué número se trata?

Resuelve los problemas.

a. Santiago tiene un saldo de –$5 450.25 en su tarjeta de crédito. Si divide su deuda en pagos fijos durante 9 meses, ¿cuál será su saldo después de 5 pagos?

b. En cierto lugar la temperatura varío de manera constante durante 4 horas consecutivas, de –1 C° a -16 C°, ¿cuál fue la variación por hora?

3. Resuelve las operaciones.

a. $10 \div 2 + (-5) \times 3 + 4 - 5 \times 2 - 8 + 4 \times 2 - 16 \div 4 =$ __________

b. $(-5 \times 3 \times 12) \div (-7 + 4 - 9 + 3) =$ __________

c. $2.8 - \frac{11}{4} \div 5 =$ __________

d. $-2\frac{1}{4} \div \frac{8}{3} + 1.5 =$ __________

**Utilizo las TIC**

Ingresa a la página: cmed.mx/m26, elige "Dividir", "Sencillo" y "Negativos" y resuelve los ejercicios.

Cambia a "Triple" y eleva el nivel, según te vayas sintiendo.

## Recapitulo

1. La regla de los signos para la multiplicación es:
   $(+1)(+1) = 1$
   $(+1)(-1) = (-1)$
   $(-1)(+1) = (-1)$
   $(-1)(-1) = 1$
2. La regla de los signos para la división es:
   $(+1) / (+1) = 1$
   $(+1) / (-1) = (-1)$
   $(-1) / (+1) = (-1)$
   $(-1) / (-1) = 1$
3. La lógica de las reglas de los signos puede establecerse con frases como:
   **No** es probable que el equipo **gane**; es decir, **sí** es probable que el equipo **pierda**.
   Una negación con algo positivo (ganar), es lo mismo que una afirmación con algo negativo (perder), que es igual a algo negativo (perder).
   **No** puedo **no** ir a esa fiesta, es decir, **sí** tengo que ir a esa fiesta.
4. Al resolver operaciones combinadas que incluyen multiplicaciones y divisiones de números positivos y negativos, se respetan la jerarquía de las operaciones y la ley de los signos de la multiplicación y la división.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Completa las siguientes divisiones.

**a.** $216 \div (\_\_\_\_\_\_) = -18$ **d.** $(\_\_\_\_\_\_) \div (-31) = -26$

**b.** $-323 \div (\_\_\_\_\_\_) = -19$ **e.** $-966 \div (-23) = \_\_\_\_\_\_$

**c.** $(-225) \div (\_\_\_\_\_\_) = 15$ **f.** $650 \div (-10) = \_\_\_\_\_\_$

**2.** Resuelve las siguientes operaciones.

**a.** $4.5 \div \frac{5}{4} = \_\_\_\_\_\_$ **c.** $\frac{11}{6} \div 2.08 = \_\_\_\_\_\_$

**b.** $0.7 + (-3.1) \div \frac{8}{9} = \_\_\_\_\_\_$ **d.** $-2.4 \times \frac{3}{5} \div 1\frac{4}{6} + 3 = \_\_\_\_\_\_$

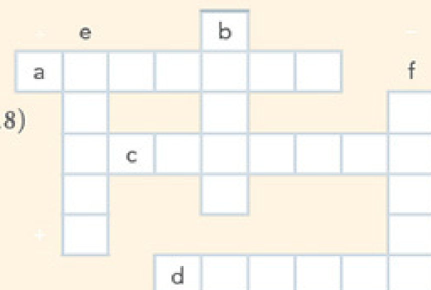
**3.** Resuelve los dos incisos.

**a.** Un buzo se mueve a razón de –1.5 m por segundo a partir del nivel del mar. Si se encuentra a –24 m del nivel de mar, ¿durante cuántos segundos descendió?
- ¿Qué operación de números positivos o negativos permite encontrar el resultado?

**b.** Supongamos que una bolsa de valores tiene un balance de –8 puntos durante varios días consecutivos, y en días posteriores se recupera y gana 24 puntos para cerrar en –40 puntos.
- ¿Durante cuántos días consecutivos tuvo un balance de –8 puntos?
- ¿Qué procedimiento seguiste para encontrar la respuesta?

**4.** Completa el crucigrama numérico. Asigna una casilla al signo (–) cuando se requiera, y otra al punto decimal. Escribe las respuestas como número decimal.

| Horizontal | Vertical |
|---|---|
| **a.** $-2.3 \times 1.5 \div 2$ | **b.** $-4 + (-20.25) \div (-1.8)$ |
| **c.** $-\frac{17}{5} \div \frac{4}{3} - 0.365$ | **e.** $\frac{-0.126}{0.36}$ |
| **d.** $0.12 + 6.12 \div (-4.5)$ | **f.** $(-2.056) \times \frac{5}{2}$ |



# Logro ir **más allá**


Quizá en algún momento hayas escuchado de algún familiar, amigo o inclusive en los medios masivos de comunicación la expresión "estoy en números rojos". Actualmente dicha expresión es utilizada por personas y empresarios para indicar que su situación económica tiene un saldo negativo, es decir, que deben dinero.

Los números negativos tienen su origen en la antigua China. En el libro *Nueve capítulos del arte matemático*, escrito por matemáticos chinos en el año 200 a. C, en la sección de prácticas de contabilidad, los números positivos se representan con palillos rojos y los negativos con palillos negros, contrario a lo que hacemos hoy día en Occidente, donde señalamos los números negativos como rojos, porque en esos tiempos no se utilizaba el signo menos (–).

1. Entra a la página cmed.mx/m27 y lee la información del texto:
   *¿Por qué pide ayuda esta persona que dice estar en números rojos?*

2. Lee, junto con una pareja, lo siguiente:

   Adriana está preocupada porque recibió su estado bancario con un saldo de –$1 250.00.

   Decide hacer un pago inicial al banco de $320.00 y el resto lo divide en 6 pagos semanales.

   a. Escriban la expresión algebraica que permite calcular el saldo semanal de Adriana después de realizar el respectivo pago. Utilicen números positivos y negativos..

   • ¿Cuál será su saldo después de 2 semanas?

   • ¿Cuál será su saldo después de 4 semanas?

   b. Elaboren una tabla como la del ejemplo presentado en la liga, donde se muestren los pagos que Adriana hará al banco cada semana.

L5

# Relaciones de proporcionalidad directa e inversa

En lecciones anteriores has estudiado variaciones lineales como las de proporcionalidad directa, donde al aumentar una cantidad la otra también aumenta, mientras que si disminuye, la otra también disminuye en la misma proporción. Existe otro tipo de variación de proporcionalidad donde esto no sucede. A lo largo de la lección analizarás las variaciones para determinar de cuál se trata.

Exploro

## Resuelvo problemas relacionados con diferentes tipos de proporcionalidad.

¿Has escuchado hablar de los concursos que se hacen llamar "El pastel más grande del mundo" o "La paella más grande del mundo"? Para este tipo de eventos se contrata a cocineros o reposteros que realizan el trabajo en determinado tiempo. En el año 2009 México hizo el *pay* más grande del mundo; para su elaboración, 60 chefs trabajaron durante 60 horas.

1. Responde a partir de la información anterior.
   - Si consideramos que todos trabajan al mismo ritmo, ¿en cuánto tiempo elaborarían dos *pays* el mismo número de chefs?
   - ¿En cuánto tiempo elaborarían 3 *pays*? ¿Y 10 *pays*?
   - ¿Qué tipo de relación representa la situación anterior? Justifica tu respuesta.

2. La siguiente tabla muestra cómo podría variar el tiempo de elaboración del *pay* si se modifica el número de cocineros, considerando que todos trabajan el mismo tiempo y al mismo ritmo.

| Número de cocineros | 60 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| Tiempo en la elaboración del *pay* (horas) | 60 | 180 | 72 | 36 |

   - ¿Qué sucede con el tiempo de elaboración del pay al aumentar el número de cocineros?
   - ¿Qué sucede si trabajan menos cocineros?
   - ¿Qué pasa si aumenta al doble el número de cocineros?
   - ¿Qué sucede si disminuye a la quinta parte?
   - ¿Cuántas horas tardarían en hacer el pastel 40 cocineros?
   - ¿Qué procedimiento usaste?

Compara tus respuestas y estrategias con las de tus compañeros. ¿Qué diferencia observan entre los dos problemas de la actividad? ¿Ambos representan una relación de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

Descubro y construyo

**I. Identifico el tipo de proporcionalidad que representa una situación, a partir de la forma en que varía.**

Marcela piensa festejar sus XV años con una pequeña comida. Quiere comprar tacos y necesita calcular cuántos se requieren según el número de invitados. Marcela calcula que, en promedio, cada invitado se comerá 5 tacos.

1. Resuelvan, en parejas, a partir de la información anterior.

- ¿Cuántos tacos tendría que comprar si invita a 15 amigos? Expliquen cómo obtuvieron la respuesta.
- ¿Qué expresión algebraica te ayuda a determinar el número de tacos que necesita comprar Marcela de acuerdo con el número de amigos que asistirán a la fiesta?

Usando la expresión algebraica anterior, completa la tabla para que muestre la variación del número de tacos con respecto al número de invitados.

| Número de invitados | Número de tacos |
|---|---|
| 5 | |
| 10 | |
| 15 | |
| 20 | |
| 25 | |
| 30 | |

- ¿Qué pasa si el número de personas aumenta al doble?
- ¿Cómo es la variación entre el número de tacos y el número de invitados?

2. Analicen la información y resuelvan.

Cuatro amigos se organizaron para construir una barda. Consideran que si trabajan todos los días al mismo ritmo, terminarán la barda en 16 días.

- Si en lugar de cuatro amigos fueran ocho los que trabajaran en la construcción, ¿qué sucedería con el tiempo?
- ¿Cuántos días tardarían en hacer la cerca ocho amigos trabajando al mismo ritmo?
- Si se reduce el número de amigos a la cuarta parte, es decir, si una sola persona hiciera la barda, ¿cuánto tardaría en construirla? Expliquen cómo obtuvieron la respuesta.
- Si el trabajo se hiciera en el doble del tiempo, ¿cuántos amigos habrían participado en la construcción?

3. El club de rapel "Gorilas" cobra una cuota de inscripción de $1 500.00 más una mensualidad de $200.00. El club "Osos" no cobra inscripción, pero establece una cuota mensual de $360.00. Las siguientes tablas muestran la variación en las mensualidades de ambos clubes:

| Osos | |
|---|---|
| Mes | Pago (pesos) |
| 0 | 0.00 |
| 1 | 360.00 |
| 2 | 720.00 |
| 3 | 1 080.00 |
| 4 | 1 440.00 |

| Gorilas | |
|---|---|
| Mes | Pago (pesos) |
| 0 | 1 500.00 |
| 1 | 1 700.00 |
| 2 | 1 900.00 |
| 3 | 2 100.00 |
| 4 | 2 300.00 |

Respondan.

- ¿En qué club el costo representa una relación de proporcionalidad? ¿De qué tipo es? Justifiquen su respuesta. ___________________________________
- ¿Cuál es el valor de la constante en este caso?

4. La familia de Sofía quiere rentar una camioneta para irse de vacaciones. El costo es de $3 500.00 por los días que van a viajar. Planean dividir el costo de la renta entre el número de personas que realizarán el viaje.
   - Si viajan dos personas, ¿cuánto tendría que pagar cada una?
   - ¿Qué pasa si el número de personas se cuadruplica?
   - ¿Qué pasa si el número se reduce a la mitad?

Consideren los siguientes grupos de viajantes y anoten lo que pagarían individualmente, en cada caso.

| No. de personas | 5 | 7 | 8 | 10 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|
| Costo por persona ($/personas) | | | | | |

- ¿Qué hicieron para obtener los valores faltantes de la tabla?

La relación que muestra la tabla corresponde a una relación de proporcionalidad inversa.

- ¿Por qué consideran que se le llama así? Expliquen su respuesta.
- ¿Qué número se obtiene si multiplican cada pareja de valores correspondientes de la tabla?

5. La siguiente tabla muestra una relación de proporcionalidad inversa. Complétenla.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 1 000 |
| 2 | 500 |
| 4 | |
| 5 | |
| 8 | |
| 16 | |

- ¿Cómo obtuvieron los valores de $y$?
- ¿Cómo podrían obtener los valores de $x$ a partir de los valores de $y$?
- ¿Existe alguna constante? ¿Cuál es su valor? Expliquen cómo obtuvieron la respuesta.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros para responder: ¿cómo identifican una proporcionalidad directa de una inversa? ¿Cómo determinan la constante en una relación de proporcionalidad inversa? Con el apoyo del maestro, lleguen a un acuerdo y regístrenlo.

## Practico

1. Completa las siguientes tablas y escribe la expresión algebraica que representa cada situación.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 3.2 |
| 2 | 6.4 |
| 3 | 9.6 |
| 4 | |
| 5 | |

$y =$ _______

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 2.5 |
| 2 | 4 |
| 3 | 5.5 |
| 4 | |
| 5 | |

$y =$ _______

- ¿Qué tipo de relación representan los datos de las tablas?

2. Emilia quiere comprar 3 canastas, por las que pagaría $45.00, pero si decide comprar dos más, pagaría $60.00,
   - ¿Existe algún tipo de proporcionalidad entre el precio y el número de canastas? ¿Por qué?
3. Leonel leyó un libro en 6 días a un ritmo de 20 páginas por día.
   - Si su hermana quiere leerlo en la mitad del tiempo, ¿cuántas páginas deberá leer por día?
   - ¿Qué tipo de variación existe entre el número de páginas que lee en un día y el tiempo que tarda en leer el libro?

### Tomo Nota

Una relación es de **proporcionalidad inversa** cuando al aumentar el valor de una variable la otra ____________________ en la misma ________________, o cuando al disminuir su valor la otra _____________ en la misma proporción.

## II. Encuentro valores faltantes en una relación de proporcionalidad inversa y calculo el valor de la constante de proporcionalidad.

1. Resuelvan, en parejas, lo siguiente.

En una escuela de natación decidieron cambiar el agua de la alberca tres días antes de una competencia porque se contaminó con los químicos de limpieza. Para cambiar el agua conectaron 6 mangueras con la misma presión, pero se dieron cuenta de que la alberca se llenaría en 4 días.

- Si sólo se tienen tres días para llenar la alberca, ¿se requieren más mangueras o menos?
- Describan su razonamiento.
- ¿Qué tipo de proporcionalidad representa esta situación? ¿Por qué?

La tabla muestra la relación que permite conocer el número de mangueras que se requieren para llenar la alberca en tres días.

| Número de mangueras ($x$) | Días ($y$) |
|---|---|
| 6 | 4 |
| x | 3 |

- Escriban qué operaciones deben realizarse para encontrar el valor de x.
- ¿Cuántas mangueras con la misma presión se requieren para llenar la alberca en tres días?
- Multiplica los números de cada fila de la tabla. ¿Existe alguna regularidad?
- ¿Qué representa el  resultado anterior en la relación?

2. En el pueblo de Omatlán organizaron una recolecta de arena para ayudar a los vecinos de Ixcatlán a protegerse de inundaciones; lograron reunir 12 toneladas de arena y ahora necesitan transportarla.

La siguiente tabla muestra cómo varía el número de viajes de acuerdo con el número de toneladas que se transporten. Completen la tabla.

| Capacidad de transportación por viaje (t) | Número de viajes |
|---|---|
| 6 | 2 |
| 4 | |
| 3 | |
| 2 | |
| 30 | |

Expliquen su procedimiento para llenar la tabla.

- ¿Encuentran alguna regularidad al multiplicar los valores correspondientes de ambas columnas?
- Utilicen su resultado para determinar cuántos viajes se harían con un camión de $1\frac{1}{2}$ toneladas. ¿Cómo obtuvieron el resultado?

### Tomo Nota

Una relación del tipo $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{c}{d}$ se llama proporción inversa y se cumple que:
___ × ___ = ___ × ___

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto de cada pareja de variables relacionadas es una constante, llamada constante de proporcionalidad inversa ($k$). En toda relación de proporcionalidad inversa se cumple que: $y = \frac{x}{k}$.

**III. Determino el tipo de variación: directa o inversa, y la constante de proporcionalidad al resolver problemas de proporcionalidad.**

1. Completa las siguientes tablas, identifica el tipo de proporcionalidad y encuentra la constante de cada una.

| Tabla 1 | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 6 | 3 |
| 5 | |
| 4 | 4.5 |
| 3 | |
| 2 | |

Tipo de proporcionalidad: ___________
Constante: ___________

| Tabla 2 | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 30 | 120 |
| 20 | |
| 10 | |
| 5 | 20 |
| 4 | |

Tipo de proporcionalidad: ___________
Constante: ___________

- ¿Cómo varía el valor de $y$ con respecto a $x$ en cada caso?
- ¿Cómo encontraste la constante de proporcionalidad en cada caso?

2. Dadas las siguientes proporciones, determinen si la relación es directa o inversa y obtengan la constante de proporcionalidad correspondiente.

**a.**

| $x$ | | $y$ |
|---|---|---|
| 2.5 | $\longrightarrow$ | 12.5 |
| 8 | $\longrightarrow$ | 40 |

Proporción: ___________
Constante: ___________

**b.**

| $x$ | | $y$ |
|---|---|---|
| 8 | $\longrightarrow$ | 18 |
| 2 | $\longrightarrow$ | 72 |

Proporción: ___________
Constante: ___________

Escribe una expresión algebraica que muestre la variación de $y$ con respecto a la variación de $x$ en cada inciso. **a.** ____________ **b.** ____________

Utiliza las expresiones algebraicas encontradas para completar las tablas que se presentan a continuación.

| Tabla (a) | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

| Tabla (b) | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

### Tomo Nota

En la relación de proporcionalidad inversa, la constante de proporcionalidad se obtiene multiplicando el valor de $x$ por el valor de $y$; se expresa así: $xy = k$

Para obtener los valores de $y$ cuando $x$ varía, se obtiene: $y =$ ___.

## IV. Resuelvo problemas de proporcionalidad inversa.

1. Resuelve, en pareja, lo siguiente:

La clínica "Tu Salud" decidió digitalizar todos los expedientes de sus pacientes para facilitar su consulta, y para ello contrató a 5 capturistas. Cada semana (5 días hábiles) capturan 300 expedientes en promedio y deben capturar 1 200 expedientes en total.

- ¿Cuántos días tardarán en hacer la captura total trabajando a ese ritmo? Expliquen su razonamiento.

Antes de empezar el trabajo, el jefe de informática hizo una tabla para analizar cómo se optimizaría el tiempo si aumentaba el número de capturistas. Completen la tabla conservando la proporción.

| Número de capturistas | Días de trabajo |
|---|---|
| 5 | |
| 8 | |
| 10 | |
| 20 | |
| 25 | |

- Si la dirección de la clínica quiere el trabajo hecho en 10 días, ¿cuántos capturistas más tendría que contratar? ¿Y para terminarlo en 4?
- ¿Cuánto vale la constante de proporcionalidad?
- Escriban una expresión algebraica que muestre la variación en los días cuando varía el número de capturistas.

**GLOSARIO**

**Nudo.** Es una medida de velocidad utilizada para la navegación marítima y aérea, cuya abreviatura es kn (que proviene de *knot*, nudo en inglés), que equivale a 1 852 km/h.

2. Una lancha tarda 3 horas en ir de la playa a una isla, navegando a 15 **nudos** (**kn**) por hora de manera constante.

Completen la siguiente tabla, que muestra la variación del tiempo con respecto a la velocidad de la lancha:

| Velocidades (kn/h) | Tiempo (h) |
|---|---|
| 15 | 3 |
| 18 | |
| 30 | |
| 45 | |
| 60 | |

- ¿A qué velocidad irá la lancha si tarda 45 minutos en cruzar?
- ¿Cuántas horas tardará en cruzar la lancha si avanza a 9 nudos por hora?
- ¿Cuál es el valor de la constante?

Escriban una expresión algebraica que muestre el valor de $y$ cuando $x$ varía:

3. El papá de Mario compró un terreno rectangular de 480 $m^2$. Mario quiere construir tres casas en el terreno pero su papá no le dio las dimensiones, por lo que empezó a calcular posibles medidas para el largo y el ancho del terreno.

- ¿Cuál es el ancho del terreno si éste mide 20 m de largo? ¿Cuál es el ancho si mide 10 m de largo?

Completen la siguiente tabla, que muestra cómo varía el ancho de acuerdo con el largo del terreno:

| Largo (m) | Ancho (m) |
|---|---|
| 10 | |
| 16 | |
| 20 | |
| 30 | |
| 60 | |

- Si el terreno tiene 15 metros de largo, ¿cómo puede calcularse su ancho? Escriban una expresión para calcular el ancho del terreno de acuerdo con la medida del largo ($x$).
- ¿Cuál es el valor constante?
- ¿Cómo se relaciona el valor de la constante con el producto de los valores de las columnas de la tabla?

Definan en grupo las características de la proporcionalidad inversa; ¿la constante de proporcionalidad siempre se calcula de la misma manera? ¿ Las estrategias que definieron en esta lección funcionan para todos los casos de proporcionalidad inversa?

## Practico

1. En la Luna la fuerza de gravedad es la sexta parte de la fuerza de gravedad en la Tierra. Si el récord de salto de altura, alcanzado por Javier Sotomayor, es de 2.48 m, ¿cuánto podría saltar Sotomayor en la Luna?

2. Un equipo de 20 campistas lleva víveres para 21 días.
   Si 6 personas del equipo renuncian al campamento, ¿pará cuántos días alcanzarían los víveres? Justifica tu respuesta.

3. Las sombras que proyecta una persona a determinadas horas del día son directamente proporcionales; es decir, cuanto más alta es la persona, más larga es la sombra.
   ¿Cuánto mide un árbol que proyecta una sombra de 3.5 m si la sombra de un poste de 1.2 m de alto proyecta una sombra de 2 m?
   Describe tu razonamiento.

**Utilizo las TIC**

En la siguiente página encontrarás un video con aplicaciones interesantes de proporcionalidad inversa: https://www.aprende.edu.mx/recursos-educativos-digitales/recursos/proporcionalidad-inversa-954.html

L6

# Reparto proporcional

Según la Secretaría de Economía, "Las microempresas son todos aquellos negocios que tienen menos de 10 trabajadores, generan anualmente ventas hasta por 4 millones de pesos… representan el 95 por ciento del total de las empresas y el 40 por ciento del empleo en el país; además, producen el 15 por ciento del Producto Interno Bruto"..

Exploro

**Resuelvo problemas de reparto y considero la manera más justa de hacerlo.**

Emilio, Sofía y Martín abrieron un negocio de jugos naturales y ensaladas cerca de un gimnasio. Para iniciar su negocio, cada uno aportó cierta cantidad de dinero: Emilio invirtió $5 000.00; Sofía, $8 000.00 y Martín, $7 000.00.

- ¿De cuánto fue la inversión inicial total?
- ¿Qué parte de la inversión aportó Emiliano?

Emiliano les propuso a Sofía y a Martín repartir las ganancias del negocio en tres partes iguales.

- ¿Sería justo repartir las ganancias como propone Emilio? ¿Por qué?
- ¿Cómo consideras que deben repartirse las ganancias de manera justa para los tres inversionistas?
- ¿A quién debería tocarle más dinero? ¿Por qué?

Las ganancias después de una semana fueron de $1 000.00 y las repartieron de acuerdo con lo que cada uno aportó.

- ¿Cuánto le correspondió a Martín?
  Explica cómo obtuviste la respuesta.
- ¿Qué tipo de proporción se puede establecer entre inversión y ganancia? ¿Por qué?

Utiliza la proporción para determinar cuánto le corresponde a Sofía y a Emilio. A Sofía le corresponden ________ y a Emilio ________.

- ¿Te parece que es justa la repartición que hicieron? ¿Por qué?

Durante el primer mes, después de separar el dinero para los gastos del negocio, les quedaron $30 000.00, monto que se repartirán entre los tres en la misma proporción de la inversión inicial.

- ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?
  Emiliano: __________ Sofía: __________ Martín: __________

Compara tus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros. En plenaria platiquen sobre cómo hacer un reparto que resulte justo para quienes participan en él y si la estrategia que encontraron funciona para cualquier problema de este tipo. ¿Se podría aplicar este tipo de reparto a todas las microempresas?

Descubro y construyo

## I. Resuelvo problemas de reparto utilizando proporciones entre los valores involucrados en la relación.

1. Analiza, en pareja, la información y resuelvan los problemas.
El señor González tiene tres hijos: Enrique, María y Pablo, que a su vez tienen 1, 3 y 2 hijos respectivamente; él está pensando repartir $24 000.00 como regalo de Navidad entre sus hijos de acuerdo con la siguiente tabla:

| | Número de hijos | Regalo (pesos) |
|---|---|---|
| Enrique | 1 | 4 000 |
| María | 3 | 12 000 |
| Pablo | 2 | 8 000 |
| Total | 6 | 24 000 |

- ¿Qué criterio siguió el señor González para repartir el dinero?
- ¿Consideran que el reparto se hizo de manera equitativa? Expliquen.
- ¿Por qué esta relación se considera de proporcionalidad directa?

Determinen un procedimiento para obtener las cantidades a repartir del señor González. Comprueben si se cumple la misma proporción para cada uno de los hijos.

- ¿Qué regularidad encuentran al dividir la cantidad que le tocó a cada hijo, entre el número de hijos?

2. En una empresa de ventas deciden repartir un bono de $42 000.00 entre sus tres mejores vendedores, Roberto, Mariana y Ernesto, de manera proporcional a lo que cada uno vendió y de acuerdo con lo que se muestra en la siguiente tabla.

| Vendedor | Ventas ($) | Bono que le corresponde ($) |
|---|---|---|
| Roberto | 100 000.00 | $x$ |
| Mariana | 60 000.00 | $y$ |
| Ernesto | 50 000.00 | $z$ |
| Total | 210 000.00 | $x + y + z =$ 42 000 |

- Cómo pueden obtener los valores de $x$, $y$ y $z$?

Para determinar lo que le corresponde a Roberto, Carlos propuso la siguiente relación:

$$\frac{42\,000}{210\,000} = \frac{x}{100\,000}$$

- ¿Están de acuerdo con Carlos? ¿Por qué?
- ¿Cómo pueden determinar el valor de $x$, es decir, lo que le corresponde a Roberto del bono?

Calculen cuánto le corresponde a cada quién del bono.
Roberto ($x$): __________ Mariana ($y$): __________ Ernesto ($z$): __________

Comenten sus respuestas con otros compañeros. Juntos redacten un procedimiento que permita realizar un reparto proporcional por medio de razones. Registren sus acuerdos en su cuaderno.

**Utilizo las TIC**

En el siguiente video podrás repasar cómo se plantea la regla de tres y utilizarla para resolver otro problema de reparto proporcional.
cmed.mx/m29

**II. Resuelvo problemas de reparto proporcional utilizando la constante de proporción.**

1. Lee el problema, completa, en pareja, la tabla y utilícenla para responder.

Juan y su padre Nemesio trabajan cosechando granos de café. Juan recogió 30 kg y su papá, 20 kg. Si les pagaron $600.00 en esa jornada, ¿cuánto le corresponde a cada uno si el pago es proporcional a los kilogramos que cosecharon?

| | Granos de café cosechados (kg) | Pago correspondiente ($) |
|---|---|---|
| Juan | | $x$ |
| Nemesio | | $y$ |
| Total | | |

- ¿Cómo se puede calcular la constante correspondiente a la proporción, es decir, lo que corresponde a cada uno por kilogramo de café cosechado?

a. Encuentren el pago que cada uno recibe utilizando la constante de proporcionalidad.
- Juan ($x$): ________________ Nemesio ($y$): ________________
  Describan el procedimiento que emplearon.
- Si al cabo de seis días logran cosechar 300 kg de café trabajando en la misma proporción, ¿cuánto recibirán por su trabajo?
- ¿Cómo lo calcularon?

b. Utilicen la constante de proporción de la situación anterior y respondan.
- Si Juan cosecha 180 kg, ¿cuánto dinero le corresponde?
- ¿Cuánto cosechó Nemesio en el mismo tiempo?
- ¿Qué cantidad le corresponde a Nemesio?

2. Resuelvan el siguiente problema.

Se quiere repartir 2 400 naranjas en 4 costales con cantidades proporcionales a 4, 6, 8 y 12 naranjas, respectivamente.
- ¿Cuánto vale la constante de proporcionalidad en este reparto?
- ¿Cómo la calcularon?
- ¿Cuántas naranjas deberán colocarse en cada costal?
- ¿Qué diferencia encontraron al resolver un reparto con cuatro magnitudes?

Comparen sus resultados con los de otras parejas y comenten sobre la constante de proporcionalidad como método para resolver problemas de reparto. Encuentren otro caso en el que se aplique el reparto proporcional. Comenten en grupo y con el maestro sobre el reparto proporcional a nivel social y qué tiene que ver con la justicia.

### Tomo Nota

Se va a repartir una cantidad $n$ en $x$, $y$ y $z$ partes, de tal forma que éstas sean proporcionales a $a$, $b$ y $c$ respectivamente, como muestra la tabla:

| | Magnitudes | Reparto |
|---|---|---|
| | $a$ | $x$ |
| | $b$ | $y$ |
| | $c$ | $z$ |
| Total | $a+b+c$ | $n=x+y+z$ |

Entonces se pueden establecer las proporciones

$\frac{x}{a} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$ y

$\frac{y}{b} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$ y

$\frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$ ;

o, si se usa la constante de proporcionalidad, entonces $k = \frac{x+y+z}{a+b+c}$, y se obtiene que $x =$ _____ , $y =$ _____ y $z =$ _____.

### III. Resuelvo problemas de reparto proporcional utilizando el valor unitario.

1. Lean la información y resuelvan en parejas el problema.

En Teotihuacán se ofrecen vuelos en globo aerostático por un costo de $2 304.00. Las familias Hernández, 3 integrantes; López, 2 personas, y Gómez, 4 personas, suben al mismo globo en el mismo viaje y deciden pagar en proporción al número de integrantes de cada familia.

- ¿Cuántos pasajeros lleva el globo?
  Calcula cuánto tendrá que pagar cada familia según el número de miembros.
  Hernández: ____________ López: _____________ Gómez: ______________
- ¿Qué hicieron para determinarlo?
- ¿Cuánto tiene que pagar cada persona? ¿Cómo resolverían el problema a partir de este dato?

2. Ahora trabajarán con segmentos de recta.

Se quiere dividir el siguiente segmento de recta de 8 cm en cuatro segmentos directamente proporcionales a 2, 4, 6 y 8 partes, llamadas *A*, *B*, *C* y *D* respectivamente.

- ¿En cuántas partes iguales tendría que dividirse el segmento de recta si se considera como una unidad? ¿Por qué?
- ¿Cuánto tendría que medir cada una de las partes?

Determinen la longitud en centímetros de cada uno de los segmentos.

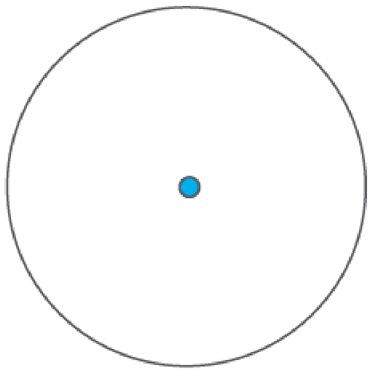
*A* = ____________ *B* = ____________ *C* = ____________ *D* = ____________

Respondan gráficamente. Dividan el segmento que se muestra, aproximando al milímetro.

3. Se quiere dividir un círculo en tres sectores circulares a partir de los ángulos centrales *A*, *B* y *C*, proporcionalmente a los valores 3, 2 y 5.

Encuentren los ángulos y trácenlos en el círculo con su transportador.

Ángulo *A*: ___________ Ángulo *B*: __________ Ángulo *C*: ___________



Encuentren la porción, como fracción, de las partes del círculo que corresponde al ángulo B.

- ¿A qué fracción del círculo corresponden el ángulo *A* y el ángulo *C*?

Completen el siguiente texto a partir de la información.

La unidad, es decir, el círculo (360°), se dividió en ____ partes: al ángulo A le corresponden ____ partes, al *B* ____ partes y, al *C* ____ partes de la unidad.

Compartan sus resultados con otras parejas; comenten sobre los tres procedimientos que utilizaron para resolver un reparto proporcional y determinen las ventajas y desventajas de cada uno de ellos. Escriban paso a paso el procedimiento para repartir cuando se utiliza el valor unitario. Regístrenlo en su cuaderno.

**Leo +**

¿Sabías que en el primer vuelo en globo, Benjamín Franklin, el inventor del pararrayos, observó el espectáculo entre la multitud, sentado en su carruaje? También te sorprenderás al saber la razón por la que una empresa lanza 20 globos aerostáticos por día. Comparte con tus compañeros de grupo tu opinión sobre esta iniciativa. Ingresa a: cmed.mx/m211

**Utilizo las TIC**

Consulta esta liga, donde encontrarás más problemas de reparto proporcional. Para practicar, resuelve los primeros cuatro problemas. cmed.mx/m212

## IV. Resuelvo problemas de reparto proporcional utilizando el procedimiento más adecuado.

1. Resuelvan en parejas los siguientes problemas; elijan el procedimiento más adecuado y verifiquen sus resultados con los de otros compañeros.

   a. Repartan el número 162 proporcionalmente a los valores 2.3, $\frac{4}{5}$ y 5.

   - ¿Qué números obtuvieron?
     Describan el procedimiento que emplearon:
   - ¿Encontraron alguna diferencia al utilizar números fraccionarios y decimales en su procedimiento? Expliquen.
   - ¿En qué situación podrían realizar un reparto proporcional con cantidades similares a las que se muestran?

   b. Roberta quiere dividir su rancho entre sus 4 hijos, proporcionalmente a sus edades. Ellos tienen 30, 36, 40 y 42 años respectivamente.

   - Si el terreno tiene 13 hectáreas, ¿cuántas hectáreas de terreno le dará a cada uno de sus hijos?
   - ¿Qué procedimiento emplearon para resolver el problema? ¿Por qué lo eligieron?

   c. Una constructora pagó $1 200.00 a tres albañiles que levantaron un muro de 40 m$^2$; a cada albañil se le paga proporcionalmente a los metros de muro que levanta.

   - ¿Cuánto le corresponde a cada uno si levantaron 13, 12 y 15 m$^2$ respectivamente?
   - ¿Qué procedimiento utilizaron para resolver el problema?

   d. En un torneo de billar, Mario, Pedro y Manuel ganaron el primer lugar al lograr 200, 340 y 400 puntos respectivamente.

   - Si el premio es de $5 640.00 y se divide proporcionalmente a los puntos obtenidos, ¿cómo se debe repartir el premio?
   - ¿Cómo acordaron qué procedimiento emplear para resolver el problema?

   e. En la escuela secundaria "Libertad" los representantes de cada grado se reúnen, durante los recreos, para organizar un torneo deportivo. Tienen sólo 30 minutos para llegar a acuerdos, por lo que deciden que cada representante tendrá un tiempo determinado para tomar la palabra y ese tiempo será proporcional al número de alumnos que tenga su grado. En primero hay 48 alumnos en segundo 52 y en tercero 45.

   - ¿Cuánto tiempo le corresponde a cada representante?
   - ¿Cómo determinaron el tiempo de cada representante?

Practico

1. Cinco campesinos del mismo ejido se pusieron de acuerdo para rentar un tractor; uno lo usará 3 días, otro 4 días, uno más 5 días y los otros dos 7 y 8 días, respectivamente. Si el costo de la renta es de $94 500.00 incluido su traslado, ¿cuánto tendrá que pagar cada campesino para que sea un pago equitativo?

Calcula el monto correspondiente a cada uno y escríbelo en la tabla.

| | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Días | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | |
| Costo ($) | | | | | | |

Describe tu procedimiento: ______________________________________________

________________________________________________________________

2. Pedro, Ismael y Manuel compraron un paquete de hojas para utilizar en sus trabajos escolares; si el paquete de 500 hojas costó $62.50, ¿cuántas hojas le corresponden a cada uno si Pedro pagó $20.00, Ismael $25.50 y Manuel el resto?

Pedro: _____ hojas    Ismael: _____ hojas    Manuel:_____ hojas

3. Tres personas decidieron rentar una casa por un año y acordaron con el dueño pagar el **impuesto predial** correspondiente. La casa no la habitaron simultáneamente; una persona estuvo 4 meses, otra 3 y la tercera 5 meses.
Si pagaron por el año de impuesto predial $3 300.00, ¿cuánto pagó cada persona?

4. La siguiente tabla de reparto proporcional muestra cuánto pagó cada uno de los tres grupos de personas que compartieron una trajinera en Xochimilco. Si pagaron de acuerdo con el número de integrantes de cada grupo y en total subieron 12 personas a la trajinera, encuentra cuántas personas subieron de cada grupo.

Completa la tabla para encontrar la respuesta.

| | Integrantes | Costo ($) |
|---|---|---|
| Grupo 1 | | 180 |
| Grupo 2 | | 300 |
| Grupo 3 | | 240 |
| | 12 | 720 |

Explica el procedimiento que utilizaste para completar la tabla.

5. Elabora un problema cercano a tus intereses que se resuelva haciendo un reparto proporcional, es decir, que resulte justo para quienes participen en él. Compártelo con el grupo.

## GLOSARIO

**Impuesto predial.** Este impuesto se aplica en muchos países y se basa en la idea de que los dueños de un bien inmueble (predio) hagan una contribución anual al Estado.

## Recapitulo

1. Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar una de ellas, la otra disminuye en la misma proporción o viceversa.
2. Un reparto proporcional implica distribuir una magnitud total de manera proporcional entre diversas magnitudes de una misma clase.
3. Dados tres elementos de una proporción directa, el número faltante se encuentra con los productos cruzados y se resuelve con una regla de tres simple.
4. Dados tres elementos de una proporción inversa, el número faltante se encuentra con los productos de parejas relacionadas.
5. Si $x$ y $y$ son directamente proporcionales entonces $y = kx$, donde $k$ es la constante de proporcionalidad.
6. Si $x$ y $y$ son inversamente proporcionales entonces $y = k/x$', donde $k$ es la constante de proporcionalidad inversa
7. Para determinar la constante de proporcionalidad en un reparto proporcional, se divide la cantidad a repartir entre la suma de las magnitudes entre las que se realizará el reparto (partes proporcionales).

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

1. Se quiere construir un triángulo cuya área sea de 40 cm²; elabora en tu cuaderno una tabla con 6 opciones de la medida de la base y de la altura de dicho triángulo.
   - ¿Cuál es el tipo de variación que existe entre las magnitudes base y altura si el área se mantiene constante?
   - Encuentra la altura ($h$) del triángulo cuya base es de 16 cm.
   - Determina la constante de proporcionalidad.
   - Escribe una expresión que determine la altura ($h$) dada la base ($b$).

2. Dada la siguiente tabla, establece el tipo de proporción que existe entre $x$ y $y$. A continuación, encuentra la constante de proporcionalidad, escribe la expresión algebraica que representa a $y$ en términos de $x$ y calcula los valores faltantes de la tabla.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 4 | 50 |
| | 40 |
| 8 | |
| 10 | 20 |
| | 10 |

$x$ y $y$ son: ______________________________

Constante de proporcionalidad: ________________

Expresión algebraica: ______________________

3. Una empresa va a repartir un estímulo económico de $5 000.00 entre cuatro empleados en proporción directa a su antigüedad en el trabajo. Mario lleva trabajando 2 años, Jesús 3.75 años, Fermín 4 años y Elizabeth 1.5 años, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

4. El costo para dar mantenimiento a una privada de tres casas es de $9 400.00; si éste se divide según el tamaño de los terrenos de las casas y las dimensiones son: 160 m², 140 m² y 180 m² respectivamente, ¿cuánto deberá aportar cada uno de los dueños de las casas?

5. El señor Vicente quiere repartir $1 440.00 entre sus nietos de manera proporcional a sus edades: 6, 12 y 18 años respectivamente. ¿Cuánto le tocará a cada uno?

# Logro ir **más allá**

La Lotería Nacional es una institución de la nación que se fundó en 1771 con el fin de recaudar fondos para beneficio del pueblo mexicano. Después de la Revolución, de 1915 a 1920, por primera y única vez se interrumpieron los sorteos. Fue en el periodo del presidente Adolfo de la Huerta que este sorteo recibió el nombre de Lotería Nacional para la Asistencia Pública, como hasta hoy se le conoce.

En 2001 se permitió por primera vez que las niñas participaran como "gritones". Actualmente, de los 40 "gritones" que anuncian los números ganadores en cada sorteo, 23 son niñas y 17 niños. ¿Piensas que es una justa proporción?

El premio mayor es de $18 000 000.00 en 60 001 números del 0 000 al 60 000 en tres series de 20 boletos cada una, es decir, 60 boletos tienen el mismo número. Cada boleto cuesta $500.00.

1. Si Juan, Carlos, María y Karla compran juntos una serie, ¿cuánto ganarían si compraran el número del premio mayor?
   - ¿Cuánto gastarían en la serie?

   Si Juan pagó $3 700.00, Carlos $2 000.00, María $2 400.00 y el resto lo puso Karla:
   - ¿Cómo deberían repartir el premio si lo ganaran?
   - ¿Cuánto ganaría cada uno de ellos?

   Juan: ________________ Carlos: ________________
   María: ________________ Karla: ________________

   Determinen el premio por "cachito" (boleto).
   - Si María hubiera puesto $ 3 000.00, ¿cuánto habría ganado?
   - ¿Cuánto debería haber pagado Carlos si hubiera querido ganar $4 200 000.00?

   Escriban una expresión para determinar el monto del premio ($p$) de acuerdo con la cantidad invertida ($i$).

2. Si la lotería ofreciera el mismo premio por $750.00 el "cachito", ¿cuál sería el premio por "cachito"? Escriban sus operaciones.

**Leo +**

Como iniciativa para divulgar su origen e importancia, la Lotería Nacional para la Asistencia Pública emitió un boleto de lotería, en agosto de 2013, conmemorando el aniversario número 50 de la Dalia o *Acocoxochitl*, desde que ésta se decretó como "Símbolo de la Floricultura Nacional".
cmed.mx/m214

L7

# Sistemas de ecuaciones lineales de 2 × 2

Hay algunos problemas que incluyen dos variables y se pueden resolver estableciendo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Exploro

## Resuelvo un problema algebraico con dos incógnitas.

Armando y Gabriela son jefes de grupo y quieren organizar una reunión en el recreo para compartir el "lunch" con sus compañeros. Deciden comprar tortas y jugos y hacer cuentas para saber cuánto deben pedir a cada compañero.

Gabriela compró, en alguna ocasión, 8 tortas y 5 jugos por los que pagó $152.00, pero no recuerda el precio de cada producto.

Armando dice que se puede obtener el precio de los dos productos con la expresión algebraica: $8t + 5j = 152$, donde $t$ representa el precio de las tortas y $j$, el de los jugos.

- ¿Es posible saber el precio de las tortas y los jugos con la expresión de Armando? Explica por qué.

Gabriela recordó que las tortas cuestan $6.00 más que los jugos.

- ¿Qué expresión algebraica representa la diferencia en el precio de las tortas y los jugos?
- Armando dice que las tortas cuestan $15.00 y los jugos $15 - 6 =$ $9.00. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el precio de las tortas y los jugos?
- ¿Cómo lo determinaste?
- Sustituye el valor de ambos productos en la expresión de Armando y en la que estableciste y verifica que la igualdad se cumpla en ambos casos.
- Si Gabriela no hubiera recordado la diferencia en los precios, ¿se podría calcular el precio solamente con el total que pagó?

En el grupo hay 26 alumnos y cada uno comerá dos tortas y un jugo.

- Si el costo se divide en partes iguales, ¿cuánto tendrá que aportar cada integrante del grupo?

Compara tus respuestas y estrategias de solución con las de otro compañero. Juntos elaboren un problema que incluya dos incógnitas y que se pueda resolver estableciendo dos ecuaciones, e intenten resolverlo. Si se tiene el valor de una incógnita, ¿cómo se puede conocer el de la otra? ¿Por qué creen que se utilizan distintas literales para diferentes incógnitas?

## Descubro y construyo

**I. Establezco el sistema de ecuaciones que representan un problema y lo resuelvo.**

1. Resuelve junto con un compañero la siguiente situación.

Ernesto fue al cine con su familia. Compraron 5 boletos y 4 bolsas de palomitas y gastaron $250.00. Ernesto le preguntó a su papá por el precio de ambas cosas, a lo que el papá le respondió: "Las palomitas costaron $5.00 menos que cada boleto".

- ¿Cómo podría saber Ernesto el costo de cada cosa?

Identifica las incógnitas que representen el problema y establece una literal para cada una.

- ¿Qué expresión algebraica representa lo que gastó el papá de Ernesto?
- ¿Qué expresión representa la diferencia entre el precio de los boletos y el de las palomitas?

Ernesto quiso calcular el precio de ambos productos y probó algunas combinaciones: con $b = 40$ y $p = 40 - 5 = 35$, y con $b = 35$ y $p = 35 - 5 = 30$, donde $b$ representa el costo de cada boleto en pesos y $p$ el costo de cada bolsa de palomitas.

- ¿Alguna es la solución? ¿Por qué?
- ¿Cuál fue el total a pagar en ambos casos?
- ¿El precio es mayor o menor a lo que gastó su papá?
- ¿Los boletos pueden costar $20.00?

Ahora ya sabes que los boletos cuestan menos de $40.00 y más de $20.00.

2. Utiliza la información anterior y estima el precio de los boletos y de las palomitas.
3. Verifica tu estimación sustituyendo los valores de las literales en ambas ecuaciones. Si no obtuviste las respuestas correctas, prueba otras combinaciones hasta obtenerlas.

Reúnanse varios compañeros y comparen sus resultados. Con base en ellos, calculen el precio de 3 boletos y tres bolsas de palomitas. Exploren cómo podrían descartar algunas parejas de soluciones a partir del contexto del problema.

**II. Establezco el sistema de ecuaciones que representa un problema y lo resuelvo con el apoyo de tablas.**

José Luis lleva en su cartera $1 800.00 en billetes de $100.00 y $200.00.

- ¿Es posible determinar cuántos billetes de cada denominación lleva José Luis en su cartera? ¿Por qué?
- José Luis comentó que tenía 10 billetes. Escribe el sistema de ecuaciones que representa la cantidad de dinero y el número de billetes.
- ¿Es posible saber ahora cuántos billetes lleva de cada denominación? ¿Cómo?

### Tomo Nota

Una pareja de ecuaciones lineales con dos incógnitas se llama **sistema de ecuaciones lineales de 2 × 2**, en las cuales cada incógnita se representa con diferente literal. En general un sistema se puede escribir:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

donde ___ y ___ representan las incógnitas. Resolver el sistema es encontrar los ________ para $x$ y $y$ que hagan verdaderas ambas ________ .

1. Completa la tabla de posibles resultados y utilízala para responder el problema:

| Billetes de \$100.00 | Billetes de \$200.00 | Total del dinero |
|---|---|---|
| 8 | 2 | \$1 200.00 |
| | 3 | |
| 6 | | |
| 5 | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

- ¿Cuántos billetes de cada denominación lleva José Luis en la cartera?

2. En un taller hay 15 vehículos entre coches y motocicletas; el número de llantas de todos los vehículos es de 48.
   - ¿Cuántas motocicletas y coches hay? Para saberlo, primero representa el problema con un sistema de ecuaciones.

Elabora en tu cuaderno una tabla como la siguiente, de manera que el total de vehículos siempre sea 15.

| Número de coches | Número de motos | Total de ruedas | Total del vehículos |
|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 32 | 15 |
| 2 | 13 | 34 | |

- ¿Cuántas motocicletas y coches hay en el taller?
- Si en lugar de 15 vehículos hubiera 154 y 458 ruedas, ¿sería útil la tabla? Intenten resolverlo intuitivamente utilizando un sistema de ecuaciones.

3. Representa el problema con un sistema de ecuaciones:
   - ¿Cuál es la solución? Explora diferentes combinaciones y verifica los resultados.

Existen problemas matemáticos en los que la intuición o el ensayo y error nos ayuda a resolverlos, pero cuando son más complicados es necesario establecer métodos más eficaces para lograrlo.

**III. Represento y resuelvo problemas mediante un sistema de ecuaciones 2 × 2.**

Las edades de Gabriela y de su mamá suman 56 años, y la mamá triplica la edad de Gabriela.

1. Plantea un sistema de ecuaciones $2 \times 2$ en el que la primera ecuación represente la suma de edades y la segunda, la relación entre ellas.
   - Resuelve el sistema de ecuaciones. ¿Cuántos años tiene cada una?
   - Comprueba tus resultados despejando las incógnitas en ambas ecuaciones.
   - ¿Cómo representarías algebraicamente la edad de Gabriela hace 5 años?

Comparen, en grupo, sus métodos y comprueben sus resultados. Analicen, para cada problema, si existe una única solución.

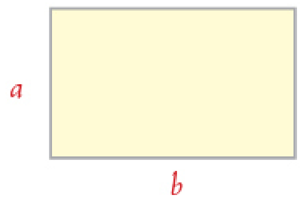
## Practico

1. Juana fue al mercado y compró 3 kg de papas y 2 kg de jitomate. Si pagó \$65.00 y el kilogramo de papas cuesta \$15.00, ¿cuánto cuesta el kilogramo de jitomate?

2. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales para representar cada situación.

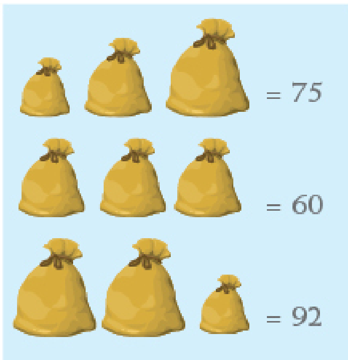
| | |
|---|---|
| Gasté \$20.00 en lápices y plumas; las plumas cuestan cuatro veces más que los lápices. | |
| Hace dos años la edad de mi mamá era el doble de la mía; ahora es 12 años mayor que yo –dijo Pedro. | |
| Carlos tiene cinco videojuegos más que los que tiene Mario, y juntos tienen 17. | |
| Marcela y Gabriela anotaron 24 puntos en el partido de basquetbol, pero Gabriela anotó el triple que Marcela. | |

3. Calcula las dimensiones del rectángulo si se sabe que su perímetro es 16 y que la base es el triple de la altura.




4. Si tres chocolates y un cuaderno costaron \$50.00, ¿cuánto cuesta cada uno si los cuadernos cuestan lo mismo que dos chocolates? Establece combinaciones para estimar el costo de cada uno.

5. Encuentra el valor de cada una de las bolsas utilizando la información de la imagen. Plantea un sistema 2 × 2 y resuelve.




6. A Daniel le gusta mucho hacer deporte: corre y nada durante 120 minutos todos los días; si el tiempo que corre es el triple de lo que nada, ¿cuánto tiempo dedica a cada actividad? Establece un sistema de ecuaciones que represente el problema; utiliza una tabla o crea combinaciones de valores para encontrar la solución.

7. La suma de las edades de Beatriz y de su tío Manuel da 64 años. Dentro de 4 años la edad del tío será cinco veces la edad de Beatriz; el tío le dijo: "Eres una niña". ¿Tendrá razón el tío? ¿Cuántos años tiene cada quien?

8. Completa el siguiente sistema para que su solución sea $x = 4$ y $y = 3$.
$3x + 2y =$ $\qquad$ $5x - 3y =$

**Utilizo las TIC**

En la siguiente página encontrarás más problemas que seguramente podrás resolver. cmed.mx/m215

## Recapitulo

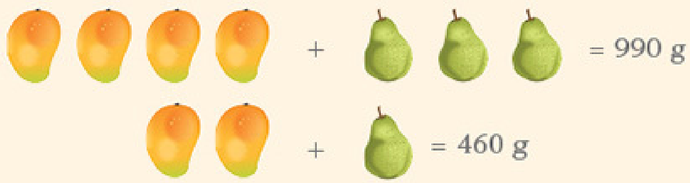
1. Un sistema de ecuaciones lineales de $2 \times 2$ es una pareja de ecuaciones con dos incógnitas de la forma: $ax + by = c$, $dx + ey = f$, donde $x$ y $y$ representan las incógnitas.
2. Algebraicamente, las incógnitas iguales se representan con la misma literal.
3. Utilizamos literales diferentes para representar incógnitas distintas.
4. Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar valores para las incógnitas que al sustituirse en ambas ecuaciones hagan verdaderas ambas igualdades.
5. Un sistema de ecuaciones lineales se puede resolver, de manera intuitiva, mediante estimaciones y aproximaciones, con el apoyo de tablas u otros recursos, aunque existen procedimientos expertos que verás más adelante.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

Resuelve los siguientes problemas y comprueba los resultados.

1. Observa el pictograma.




Considera que todos los mangos tienen la misma masa y todas las peras también. ¿Cuántos gramos de masa tiene un mango y cada pera, aproximadamente?

2. La suma de las dos cifras de un número es 14 y si al número se le resta 18, las cifras se invierten. Halla el número.
3. Para obsequiar 12 bolsitas de golosinas a mis amigos en Navidad, compré 4 paquetes de chocolates y 3 de caramelos; si a cada bolsita le puse uno de cada uno, ¿cuántas golosinas vienen en cada paquete?
4. Matías y su hermano tienen 36 monedas de $5.00 de colección. Si Matías tiene 8 monedas menos que su hermano, ¿cuántas monedas tiene cada uno?
5. En el partido de basquetbol el equipo de la escuela anotó 42 puntos; si los tiros de 3 puntos fueron la mitad de los de dos puntos, escribe el sistema de ecuaciones que representa el problema.

Completa la tabla y encuentra la solución.

| Tiros de 2 puntos | Tiros de 3 puntos | Total de puntos |
|---|---|---|
| 6 | | |
| 8 | | |
| 10 | | |
| 12 | | |
| 14 | | |
| 16 | | |
| 18 | | |

- ¿Cuántos tiros de dos puntos y cuántos de tres puntos anotó el equipo?

6. Elige la solución al siguiente sistema, encerrando en un círculo la respuesta.

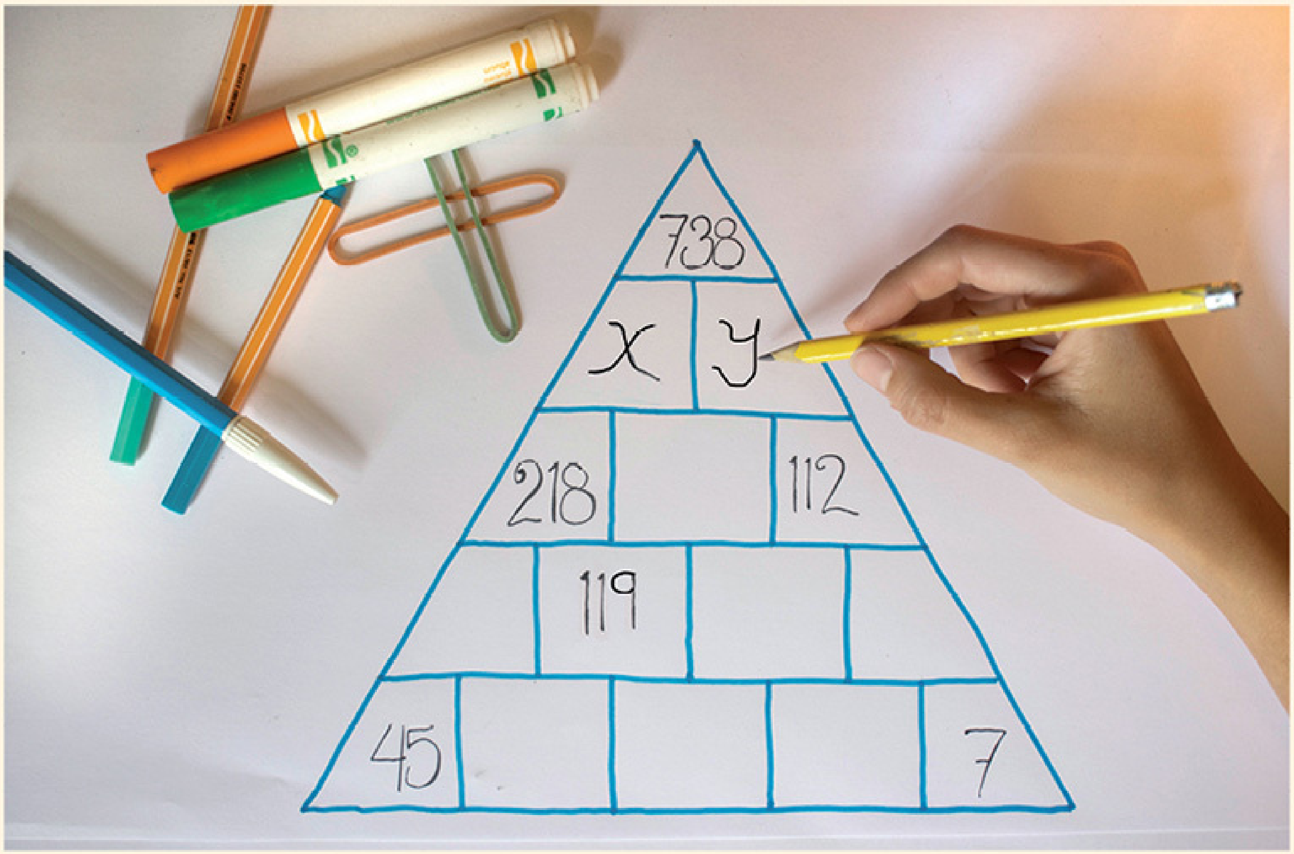
$3x - 5y = 20$

$7x + 2y = 33$

a. $x = 0, y = -4$ b. $x = 5, y = -1$ c. $x = 20, y = 8$ d. $x = -5, y = 1$

7. En la granja de don Juan hay 38 animales entre vacas y gansos. Empezó a resguardarlos de la lluvia en el granero y contó 126 patas en total. ¿Cuántos animales de cada especie hay en la granja?

# Logro ir **más allá**




Las matemáticas pueden tomarse como un pasatiempo; para comprobarlo te presentamos este acertijo.

Se tiene que rellenar un triángulo teniendo en cuenta que en cada casilla el número es la suma de los dos números que tiene abajo.

1. Responde.
   - ¿Cómo se obtiene el valor de la casilla de la punta de la pirámide en función de $x$ y $y$? Escribe algebraicamente la respuesta.

   Escribe algebraicamente el valor de $y$ en función de los valores de las casillas del tercer renglón y de $x$: $y$ = ________________

2. Plantea un sistema de ecuaciones para el segundo renglón, de arriba abajo, considerando la información anterior.

3. Repite lo mismo para los siguientes renglones hasta llegar al pie de la pirámide.

L8

# Los polígonos y sus ángulos

La geometría es una ciencia muy antigua y una rama de las matemáticas que estudia las propiedades y magnitudes de figuras en el plano (puntos, rectas, ángulos y simetrías) y de cuerpos en el espacio. En la vida cotidiana encontramos modelos y ejemplos físicos de esos objetos ideales de los que se ocupa la geometría. Las aplicaciones de esta ciencia son muchas y muy variadas.

Exploro

## Reconozco las características de las diagonales.


En el piso del patio de la escuela está pintado un octágono regular. Regina y siete de sus amigas se colocaron, cada una, en un vértice de la figura. En orden, una por una, deben pintar con gis las líneas que parten de su vértice a los otros vértices, excepto los dos contiguos, con la condición de no pintar dos líneas sobrepuestas, es decir, donde se pintó una no se podrá pintar otra.

1. Dibuja en el octágono de la izquierda las líneas que se pueden trazar, respetando la condición de no repetir líneas. Considera que Regina inicia el juego.

| | Líneas |
|---|---|
| Regina | |
| Natalia | |
| Daniela | |
| María | |
| Gabriela | |
| Ana | |
| Esperanza | |
| Isabel | |
| **Total** | |

- ¿Cuántas líneas pintó Regina?
- ¿Cuántas líneas pintaron en total y dibujaste en el octágono?
- Si Esperanza hubiera iniciado el juego, ¿cuántas líneas habría trazado? ¿Y si hubiera sido María?

Natalia pidió ser segunda y comentó: "Si soy la última, ya no pintaré ninguna línea".

- ¿Estás de acuerdo con el comentario de Natalia?

Anota en la tabla cuántas líneas trazaría cada alumna si se sigue el orden que se muestra. Recuerda que las líneas no se pueden sobreponer.

Si cada línea trazada por las niñas representa una **diagonal** del octágono, describe las características de las diagonales de un polígono.

- ¿Cuántas diagonales tiene un cuadrado?.
- ¿Cuántas diagonales parten de cada vértice?
- Si el polígono en el patio fuera un hexágono, ¿cuántas diagonales partirían de cada vértice?

Comparte tus resultados con una pareja. ¿Hay alguna relación entre el número de lados y de diagonales en un polígono? Traten de encontrar una justificación e intenten deducir una manera de calcular el total de diagonales sin tener que dibujarlas.

**GLOSARIO**

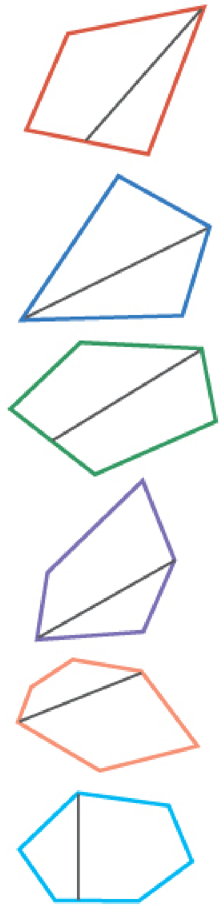
**Diagonal.** Segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

Descubro y construyo

**I. Determino el número de diagonales de un polígono.**

Diferentes estudiantes trazaron líneas para representar una diagonal en las figuras que se muestran a la derecha.

1. Analicen, en parejas, y determinen en qué casos las líneas no representan una diagonal.
2. Tracen todas las diagonales de los polígonos y completen las expresiones.



| Figuras | Número de lados | Diagonales desde un vértice | Total de diagonales |
|---|---|---|---|
| Cuadriláteros | | | |
| Pentágonos | | | |
| Hexágonos | | | |

- ¿Qué relación hay entre el número de lados de cada polígono y el número de diagonales desde un vértice?

Escriban una expresión algebraica que permita calcular el número de diagonales que parten de cada vértice de un polígono de *n* lados.

- En la expresión anterior, ¿existe alguna diferencia si el polígono es regular o no? Expliquen por qué.

Existen otros polígonos, los cóncavos, que tienen un ángulo mayor a 180°, pero en la lección trabajaremos únicamente con polígonos convexos.

2. Dibuja en tu cuaderno un heptágono, un nonágono y un decágono, convexos, traza todas sus diagonales, cuéntalas y completa la tabla.

| Número de lados | Diagonales desde un vértice | Total de diagonales |
|---|---|---|
| 7 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |

- En caso del heptágono, si multiplican el número de lados por el número de diagonales desde un vértice, ¿cómo podrían obtener el total de diagonales?
- Lo anterior se repite en los otros polígonos?

A partir de lo anterior, escriban una fórmula o expresión que permita obtener el total de diagonales de un polígono de *n* lados. Justifiquen su respuesta.

- ¿La fórmula funciona para triángulos? ¿Por qué?

Comenta, en pareja, cómo encontraron la expresión. Juntos propongan un nuevo polígono, tracen sus diagonales y comprueben con sus expresiones. Si encuentran diferencias, rectifiquen su fórmula hasta coincidir o hasta que sean expresiones algebraicas equivalentes.

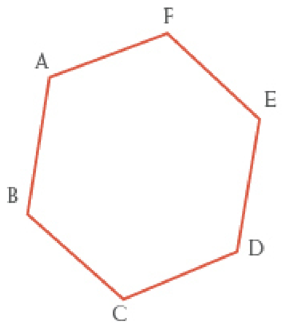
**GLOSARIO**

**Polígono convexo.** Aquel cuyos ángulos interiores miden menos de 180° y todas sus diagonales están dentro de él.

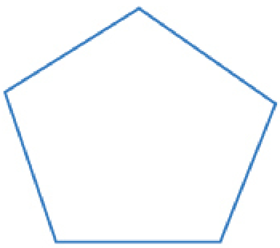
**Utilizo las TIC**

En el siguiente sitio encontrarás una herramienta que te permite analizar el número de diagonales en un polígono: cmed.mx/m216

## II. Deduzco la fórmula para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono.

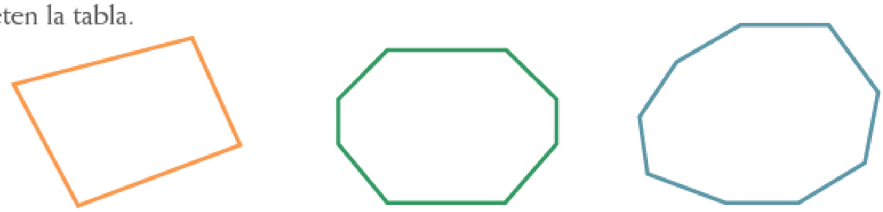



1. En parejas, tracen todas las diagonales desde el vértice C en el siguiente hexágono.
   - ¿Cuántos triángulos se forman en el hexágono?
   - ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cada triángulo?
   - ¿Qué relación hay entre los ángulos de los triángulos que se forman y los ángulos del hexágono?
   - ¿Cuánto suman los ángulos interiores del hexágono? ¿Cómo lo determinaron?
   - ¿Qué operación realizarían para determinar la suma de los ángulos interiores del hexágono a partir del número de triángulos en que se divide?



2. Ahora, analicen el siguiente pentágono.
   - ¿En cuántos triángulos se puede dividir desde un vértice?
   - ¿Cuánto suman los ángulos interiores de los triángulos en los que se divide?
   - El resultado anterior ¿tiene alguna relación con la suma de los ángulos interiores del pentágono? Justifiquen su respuesta.

3. Tracen las diagonales desde un mismo vértice en los siguientes polígonos y completen la tabla.



| Número de lados | Número de triángulos en los que se divide | Suma de ángulos interiores (°) |
|---|---|---|
| 4 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |

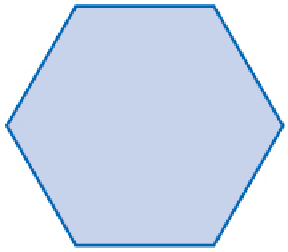
Escriban una expresión para el número de triángulos en los que se divide un polígono de *n* lados al trazar las diagonales desde un mismo vértice:

- ¿Cómo se puede calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de *n* lados, a partir del número de triángulos en que se divide?
- Escriban una expresión para encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados.

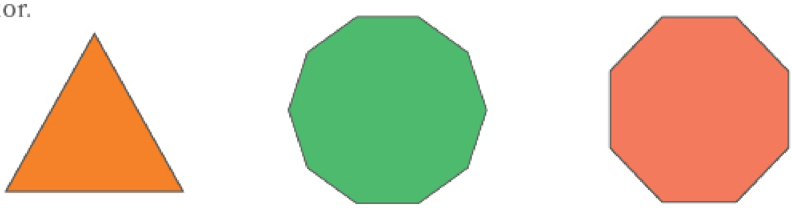
Trabajen con otras parejas y comparen sus respuestas; lleguen a conclusiones generales sobre la suma de los ángulos interiores de un polígono. Verifiquen sus resultados con el uso del transportador.

## III. Establezco una expresión algebraica para calcular la medida de los ángulos interiores de polígonos regulares.

1. En la granja de don Pepe se quiere construir un corral con forma de hexágono regular, como el modelo que se muestra.
   - ¿Qué características tienen los ángulos interiores de un polígono regular?
   - ¿Cuánto suman los ángulos internos del corral?
   - ¿Cómo determinarían la medida de cada ángulo?
   - ¿Cuánto tiene que medir cada ángulo interior del corral de don Pepe?



2. Analicen los siguientes polígonos regulares y determinen la medida del ángulo interior.



| Polígono | Triángulo | Decágono | Octágono |
|---|---|---|---|
| Suma de los ángulos interiores (°) | | | |
| Medida ángulo interior (°) | | | |

   - ¿Cómo determinarían la medida de cada ángulo sin medir?
   - ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un dodecágono?
   - Si es regular, ¿cuánto mide cada ángulo interior?
   - Si un polígono regular tiene $n$ lados, ¿cuánto suman sus ángulos interiores?
   - ¿Qué expresión representa la medida de cada ángulo interior de un polígono regular de $n$ lados?

3. Verifiquen su fórmula y completen la tabla con base en polígonos regulares.

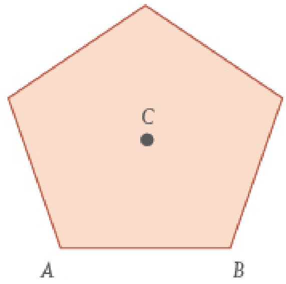
| Número de lados | Diagonales a partir de un vértice | Número de triángulos en que se divide | Suma de los ángulos interiores (°) | Ángulo interior (°) |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| $n$ | | | | |

Trabajen en grupo y comparen sus respuestas; verifiquen si todos llegaron a la fórmula para calcular los ángulos interiores de un polígono regular. Utilicen la fórmula para calcular el número de triángulos de un dodecágono regular; calculen la suma de los ángulos y la medida del ángulo interior.

**Utilizo las TIC**

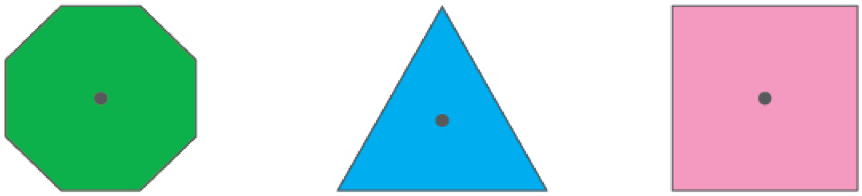
En este sitio podrán verificar la fórmula que encontraron y aplicarla a distintos polígonos regulares:
cmed.mx/m217

## IV. Calculo la medida de los ángulos interiores y exteriores de polígonos regulares.



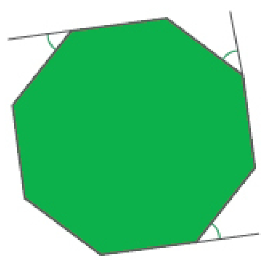

1. Considera el pentágono regular de la derecha y traza un triángulo uniendo los vértices del lado AB con el centro del pentágono..
   - ¿Qué tipo de triángulo trazaste?

   Calcula la suma de los ángulos $A$ y $B$ del triángulo.
   ¿Existe alguna relación de los ángulos $A$ y $B$ con los ángulos interiores? Explica tu respuesta.
   Determina la medida de los ángulos $A$, $B$ y $C$.
   La medida del ángulo C es la del **ángulo central** del pentágono.
   Calcula la suma de los ángulos centrales del pentágono.
2. Calcula la medida del ángulo central y la suma de ellos para cada uno de los siguientes polígonos, y escríbelo debajo de la figura.



| | | |
|---|---|---|
| Número de lados: | Número de lados: | Número de lados: |
| Ángulo interior: | Ángulo interior: | Ángulo interior: |
| Ángulo central: | Ángulo central: | Ángulo central: |
| Suma de ángulos centrales: | Suma de ángulos centrales: | Suma de ángulos centrales: |

   - ¿Cómo se puede calcular la medida del ángulo central de un polígono regular a partir del número de lados?
   - Escribe una expresión para calcular el ángulo central de un polígono regular de $n$ lados.
3. Calculen el ángulo exterior de un octágono regular; utilicen la imagen para determinarlo.



   - ¿Qué relación hay entre cada ángulo interior y exterior del polígono?
   - ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos exteriores?
   - ¿Qué hicieron para calcularlo? Describan su procedimiento.
   - ¿Qué relación encuentran entre el ángulo central y el exterior en el octágono regular?

Dibujen el ángulo exterior sobre otros polígonos regulares y resuelvan las preguntas anteriores para encontrar generalidades. Escriban sus conclusiones. A partir de esto o con otros procedimientos, determinen la medida del ángulo exterior de un polígono de $n$ lados. Para justificar sus deducciones, comparen sus respuestas con otras parejas.

**Utilizo las TIC**

En este sitio podrán ver un video en el que se demuestra, de manera elegante, cómo calcular la suma de los ángulos exteriores de un polígono. cmed.mx/m218

Otra manera de calcular la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono se muestra con *Geogebra*: cmed.mx/m219

**GLOSARIO**

**Ángulo exterior.** Ángulo formado por un lado del polígono y la prolongación de un lado adyacente a éste. También es llamado ángulo externo.

### Tomo Nota

La suma de los ángulos interiores de un polígono de $n$ lados es igual a _________ . La medida del ángulo interior de un polígono regular de $n$ lados es ___________. Las medidas del ángulo central y del ángulo exterior de un polígono regular de $n$ lados son _______ y se pueden calcular como _______. La suma de los ángulos centrales o exteriores de cualquier polígono regular es ____________.

Practico

1. Responde.
   - Si un polígono tiene en total 90 diagonales, ¿cuántos lados tiene?
   - ¿Cuántas diagonales tiene en total un heptágono?
   - ¿Cuántas diagonales parten de cada vértice?
   - ¿Cuál es el número de triángulos que se forman con las diagonales?

2. Si un polígono tiene 27 diagonales, entonces:
   - ¿Cuántos lados tiene el polígono?
   - ¿Cuántas diagonales parten de cada uno de sus vértices?
   - Si se divide el polígono en triángulos partiendo de un mismo vértice, ¿cuántos triángulos se forman?
   - ¿Cuánto suman los ángulos interiores del polígono?

3. Dado un polígono regular con 14 lados, determina:
   - Número de diagonales desde cualquier vértice: __________
   - Número de triángulos en los que se divide: __________
   - Suma de sus ángulos interiores: ________________________
   - Medida del ángulo interior: ________________________
   - Medida del ángulo central: ________________________
   - Medida del ángulo exterior: ________________________

4. Encuentra el valor del ángulo *x* en cada figura.

Figura 1

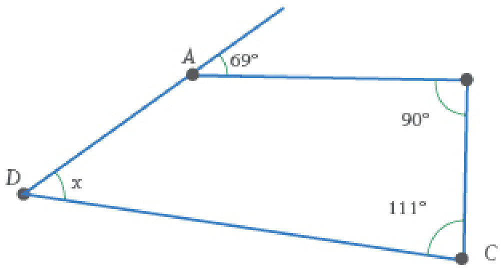



Figura 1: $x$ = __________

Figura 2

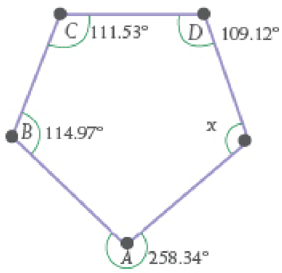



Figura 2: $x$ = __________

   - ¿Cómo calculaste el ángulo *x*? Describe el procedimiento.

**Utilizo las TIC**

En este sitio podrán realizar muchos ejercicios sobre la suma de los ángulos internos de un polígono. Si después de responder tienen dudas o errores, usen la pista y corrijan. cmed.mx/m220

L9

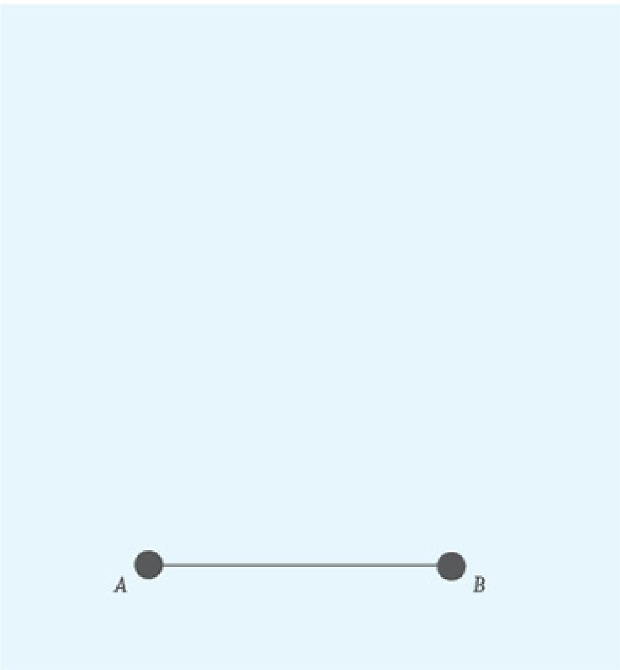
# Construcción de polígonos regulares y teselados

¿Has notado cómo las matemáticas, el arte y la naturaleza están estrechamente relacionados? La proporción áurea, los trabajos de Escher, la arquitectura, la fotografía, el cine, y más, se nutren de las matemáticas. El uso de simetrías, proporciones y objetos geométricos siempre está presente en el arte. Si observas los panales de abejas, un cuadro o una escultura, verás reflejada la matemática.

## Construyo un hexágono regular a partir del trazo de un triángulo equilátero

Exploro

1. Los panales de abejas están formados por hexágonos regulares, de manera que se pueda almacenar la mayor cantidad de miel en el menor espacio posible.




- ¿Qué característica tienen los hexágonos que permiten a las abejas formar sus panales?
- ¿Cómo podrías dibujar un hexágono regular utilizando regla y compás?

- Traza un triángulo equilátero, sobre el recuadro azul, utilizando regla y compás, a partir del segmento AB y llama C al otro vértice del triángulo.
- Ahora, traza otro triángulo equilátero de manera que uno de sus lados sea BC, y llama D al otro vértice del triángulo.
- Continúa trazando triángulos equiláteros de la misma forma hasta regresar al lado AC.

**Leo +**

En esta página puedes leer más sobre las abejas y las construcciones hexagonales.
cmed.mx/m221

- ¿Qué polígono se formó?
- ¿Cómo puedes determinar que la figura que se formó es un polígono regular? .

Traza un círculo con centro en C que pase por el punto *A*.

- ¿Qué características tiene el círculo?

¿Cómo podrías trazar el polígono a partir de la circunferencia?

Reúnete con un compañero y comparen sus figuras. ¿Cómo podrían trazar un polígono regular a partir de una circunferencia? ¿Y a partir de la medida de sus lados? Discutan lo anterior en busca de acuerdos.

## Descubro y construyo

**I. Construyo polígonos regulares inscritos en una circunferencia a partir del ángulo central.**

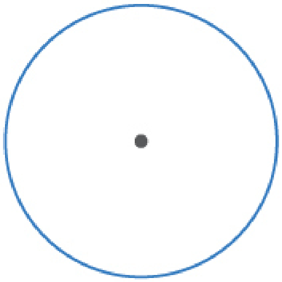
1. Resuelvan en pareja las siguientes actividades.

El maestro de Paulina les pidió trazar un octágono regular inscrito en una circunferencia. A Paulina se le ocurrió trazar un radio y dividir los 360° de la circunferencia entre ocho para construir un ángulo central del octágono.

- ¿Están de acuerdo con el procedimiento de Paulina?
- ¿Cuánto debe medir el ángulo central del octágono?

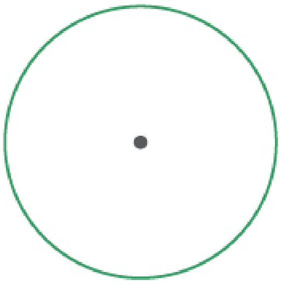
Paulina midió con su transportador y dividió la circunferencia en 8 ángulos iguales; a partir de su centro marcó puntos sobre la circunferencia y unió los puntos contiguos con segmentos de recta para formar el polígono.

Utilicen el procedimiento de Paulina y comprueben que se puede trazar un octágono regular en la circunferencia de la derecha.

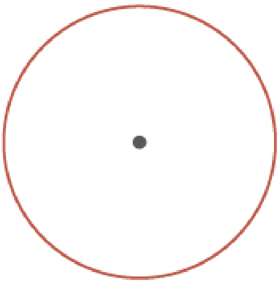


¿Lograron trazar un octágono regular? Justifiquen su respuesta.

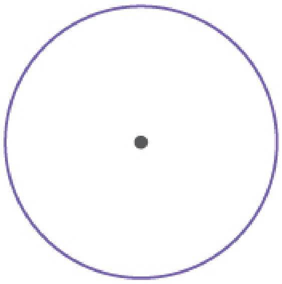
2. Ahora, determinen la medida del ángulo central de un triángulo equilátero, un pentágono regular y un nonágono regular y trácenlos sobre las siguientes circunferencias, siguiendo el procedimiento de Paulina.



Triángulo equilátero



Pentágono regular



Nonágono regular

- Utilizando el ángulo central, ¿existe alguna limitación para la construcción de un polígono regular de *n* lados?

Reúnete en pareja, comparen sus procedimientos. Optimicen los pasos para trazar un polígono regular de *n* lados dado un círculo y utilizando el ángulo central. Prueben construir un polígono siguiendo los pasos.

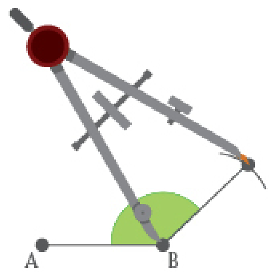
**Utilizo las TIC**

En este recurso podrás comprobar la construcción de polígonos regulares a partir del ángulo central: cmed.mx/m222

## II. Construyo polígonos regulares a partir de sus ángulos interiores y exteriores, dada la medida de sus lados.

1. Martín, un compañero de Paulina, decidió utilizar el ángulo interior para construir el octágono. Trazó un lado del octágono; con vértice en un extremo del segmento, trazó un ángulo interior del polígono y, con el compás, copió el lado AB como se muestra en la imagen; repitió el procedimiento hasta cerrar el polígono.

   - ¿Cuánto mide el ángulo interior del octágono?
   - ⇛ Sigue el procedimiento de Martín, sobre la imagen, hasta completar el octágono regular.




   - ¿Lograste construir el octágono? Escribe tus observaciones.

2. Dados los siguientes segmentos, construye un cuadrado, un hexágono y un decágono utilizando el ángulo interior del polígono.

| Cuadrado | Hexágono | Decágono |
| --- | --- | --- |
| Ángulo interior:______ | Ángulo interior:______ | Ángulo interior: ______ |

Describe cómo podrían construir un polígono regular de *n* lados dada la longitud de sus lados.

3. Para validar tu procedimiento, construye en tu cuaderno un polígono regular de 5 cm de lado a partir de sus ángulos interiores.
   - ¿Qué ángulo: el central o el interior, es más útil para construir un polígono regular? Explica tu respuesta.

4. Pablo quiere construir el octágono a partir de la medida de sus lados, usando el ángulo exterior:

- ¿Qué procedimiento se podría aplicar para construirlo?
  - ⇨ Determina la medida de los ángulos exteriores de un octágono regular.
  - ⇨ En el siguiente espacio se ha empezado a trazar el octágono.


  - ⇨ Describe los pasos a seguir para terminarlo.

____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________

  - ⇨ Sigue los pasos que propones y construye el octágono para verificar tu procedimiento.

5. Traza un pentágono y un hexágono regular utilizando la medida de su ángulo exterior; usa el segmento como el lado del polígono.

Pentágono
Ángulo exterior: _______

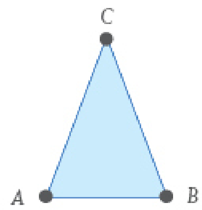
Hexágono
Ángulo exterior: _______

Compara tus trazos con los realizados por otros integrantes del grupo. Expliquen sus procedimientos. Construyan otros polígonos regulares utilizando el ángulo central y el interior siguiendo los pasos que describieron. Si tienen dudas, aclárenlas en grupo con el apoyo del maestro

**III. Construyo polígonos regulares a partir de la longitud de sus lados.**

1. Ernesto tiene muchas ganas de disfrutar con sus amigos el fin de semana y les quiere proponer volar un papalote con forma de pentágono regular, hecho con varas de 20 cm. Para hacer el papalote, Ernesto sabe que con el ángulo central y un lado del pentágono se forma un triángulo isósceles cuyo ángulo no común es el ángulo central del pentágono.
   - ¿Cuánto mide el ángulo central del pentágono?
   - ¿Cuánto miden los otros ángulos del triángulo que se forma? Explica cómo lo calculaste.

   Para completar el pentágono a partir de la medida de las varas, Ernesto trazó un círculo con centro en el vértice *C* que pasa por *A* y *B*; con su compás, copió la medida del lado *AB* sobre la circunferencia y acomodó las varas para formar el papalote.

   - ¿Podrá construir el pentágono con este procedimiento? Explica por qué.
   - ¿Se podría seguir el procedimiento de Ernesto para trazar cualquier polígono a partir de la medida de sus lados?

2. Traza los siguientes polígonos con la medida de lado que se indica.
   - ¿Cómo pueden determinar el centro de cada polígono?

Hexágono


Nonágono


Trabaja en pareja y analicen el método propuesto; elijan un polígono y su lado. Constrúyanlo en su cuaderno siguiendo el método elegido. Comparen los métodos para construir polígonos regulares dados el ángulo interior, el central, el exterior o la dimensión del lado para determinar qué datos necesitan según el caso y qué procedimiento les resulta más sencillo. Verifiquen si comparten la misma opinión.

## IV. Análisis en la construcción de mosaicos (teselados).

La teselación es una construcción de polígonos regulares o irregulares que cubren una superficie plana sin dejar huecos ni sobreponerse. Con polígonos regulares e irregulares se pueden realizar verdaderas obras de arte, empleando sólo la creatividad.

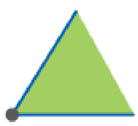
**Leo +**

Para entrar al mundo de las matemáticas solo necesitas tu imaginación. Anímate a visitar este importante museo en tu país: cmed.mx/m223

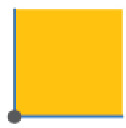
1. En parejas, resuelvan lo siguiente:
   - ¿Han observado el diseño de los pisos de mosaico o loseta de salones, museos o incluso de algunos baños? Describan su forma.
   - ¿Cuánto suman los ángulos que comparten un mismo vértice en los mosaicos?
   - ¿Se han preguntado si con todos los polígonos se puede cubrir el plano?, ¿qué piensan?

   Se conocen como **teselados** regulares aquellos que se pueden crear usando un solo polígono regular.

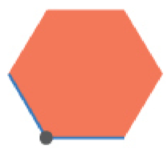
   ⇛ Repitan, en cada caso, el dibujo del polígono sobre los lados de color azul, rodeando el vértice que comparten, para tratar de cubrir el plano.



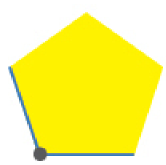
Triángulo



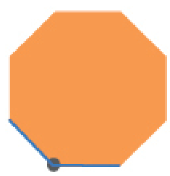
Cuadrado



Hexágono



Pentágono



Octágono

- ¿Con qué polígonos regulares se puede formar un teselado regular?
- En esos casos, ¿cuánto suman los ángulos que coinciden en un mismo vértice?
- ¿Podrían colocar losetas en forma de pentágono regular y cubrir el plano? ¿Por qué?
- ¿Podría teselarse el plano únicamente con octágonos regulares? ¿Por qué?

Otro tipo de teselados construidos con polígonos regulares son los semirregulares, que se forman con dos o más polígonos distintos de manera que en todos los vértices se sigue el mismo patrón.

2. Para investigar con qué polígonos regulares se pueden formar teselados semirregulares, completen la siguiente tabla:

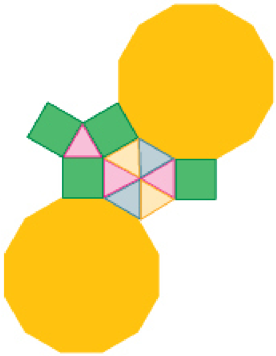
| Polígono regular | Triángulo | Cuadrado | Pentágono | Hexágono | Octágono | Dodecágono |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de lados | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 |
| Ángulo interior (°) | | | | | | |

3. Seleccionen las combinaciones de figuras con las que se podría formar un teselado semirregular, y en cada elección anoten cuántas figuras de cada tipo coinciden en un mismo vértice y la suma de los ángulos correspondientes.
   a. Cuadrados y triángulos.
   b. Hexágonos y octágonos.
   c. Dodecágonos, cuadrados y hexágonos.
   d. Cuadrados y octágonos.
   e. Cuadrados, hexágonos y octágonos.
   f. Hexágonos, triángulos y cuadrados.
   g. Dodecágonos y triángulos.
   - ¿Cuánto suman los ángulos que coinciden en un mismo vértice?
4. Tracen los polígonos regulares de la tabla, todos con la misma medida de lados. Cópienlos varias veces y construyan con ellos los teselados para validar sus respuestas.

### Tomo Nota

Para teselar el plano con polígonos regulares, la _________ de los ángulos interiores de los polígonos que coinciden en un mismo vértice deber ser de _______.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Traten de construir otros teselados semirregulares para validar sus conjeturas.



6. Analicen las figuras que forman el siguiente esquema y respondan.
   - ¿Se puede teselar el plano siguiendo este patrón? Justifiquen su respuesta.
   - ¿Se puede teselar un plano con un trapecio cualquiera? Intenten con algunos y traten de encontrar una justificación.

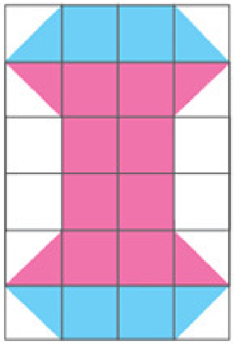
### Utilizo las TIC

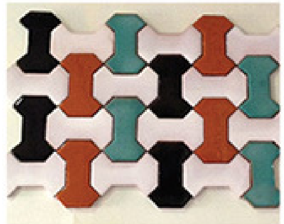
Uno de los artistas que utilizó los teselados para hacer diseños artísticos fue M. C. Escher. En esta liga podrás ver algunos de sus diseños en animación. Descubre cuál es la figura geométrica que da origen a cada una de estas obras de arte.
cmed.mx/m224

Discutan en grupo para qué puede servir construir polígonos regulares y teselar el plano. Reflexionen sobre la relación de las matemáticas y el arte. Comparen sus trazos y comenten sobre la habilidad para manejar el juego de geometría y las ventajas de utilizar un medio tecnológico para construir polígonos y teselados.

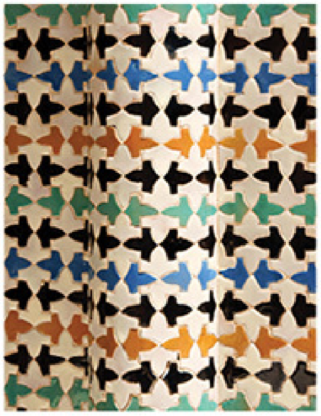
Los teselados irregulares dan más posibilidad de armar patrones originales. Se construyen a partir de una figura generadora y se utilizan transformaciones que mantienen su forma y tamaño, como lo son las reflexiones (espejo con respecto a una recta), rotaciones (girar la figura, desde un punto como centro, un cierto ángulo) y traslaciones (deslizar figuras en una dirección, una longitud dada).

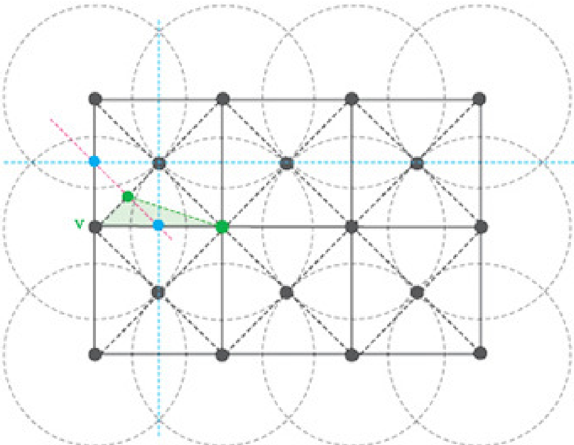
7. Completen con este patrón un mosaico sobre su cuaderno; por su forma, a este patrón se le llama "El hueso" y también se encuentra en la Alhambra.





8. La siguiente imagen es un detalle de un mosaico de la Alhambra que, por su forma, se conoce como "Avión". Identifiquen el patrón haciendo trazos con su compás en el esquema que se muestra.

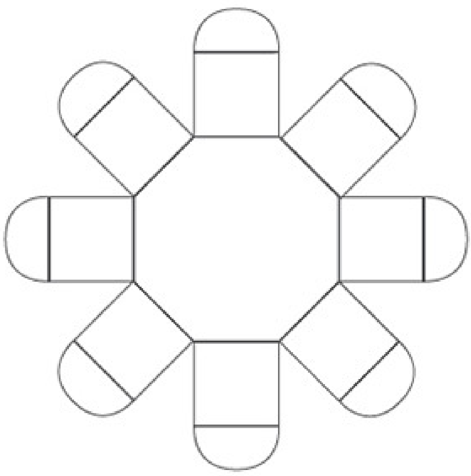




Diseñen teselados, compártanlos con el grupo, escojan los que más les gusten y decoren el salón.

**Practico**

1. Reproduce en una cartulina la siguiente figura usando una escala de 3:1 respecto al dibujo; después recorta, decora con pedazos de papel de colores o plumones y elabora un sobre como muestra la imagen, escribe un mensaje y regálalo a un ser querido.



**Utilizo las TIC**

En la siguiente página encontrarás más información sobre teselaciones, y también videos, creaciones y un poco de historia: cmed.mx/m225

Entra a: www.geogebra.org y repite las construcciones, abre un archivo y repite los pasos de las actividades 7 y 8 para reproducir los teselados que se muestran en el libro. con las herramientas de este recurso.

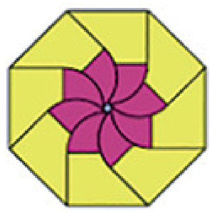


Imagen del sobre.

## Recapitulo

1. El total de diagonales de un polígono de $n$ lados es igual a: $\frac{n(n-3)}{2}$.
2. Los polígonos de $n$ lados tienen $n - 3$ diagonales que parten de un vértice.
3. La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es $(n-2)180°$.
4. La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es 360°.
5. El ángulo central de un polígono regular es $\frac{360}{n}$
6. El ángulo central es igual al exterior en todo polígono regular.
7. Se puede construir, con el juego de geometría, un polígono regular de $n$ lados usando: la longitud del lado o la medida de los ángulos interiores, exteriores o centrales.
8. Una teselación es un recubrimiento del plano con figuras geométricas con un patrón en el que no se dejan huecos ni se sobreponen piezas.
9. Una teselación regular solamente se puede construir con triángulos, cuadrados y hexágonos, ya que son los únicos cuyo ángulo interior es divisor de 360°.
10. Se puede teselar usando otros polígonos para formar patrones o teselas.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

1. Determina el número total de diagonales de un polígono de 7 lados.

2. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos internos de un polígono de 14 lados?

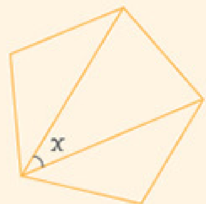
3. ¿Cuánto mide el ángulo externo de un polígono regular de 20 lados?

4. ¿Cómo se llama el polígono regular cuyo ángulo interior mide 144°?

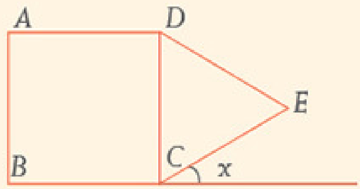
5. ¿Cuál es el número de lados del polígono regular cuyo ángulo interior es el doble de su ángulo exterior?

6. Si todas las figuras se formaron con polígonos regulares, determina los siguientes ángulos marcados con x.

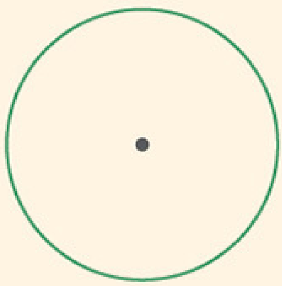
**a.** $x=$ __________



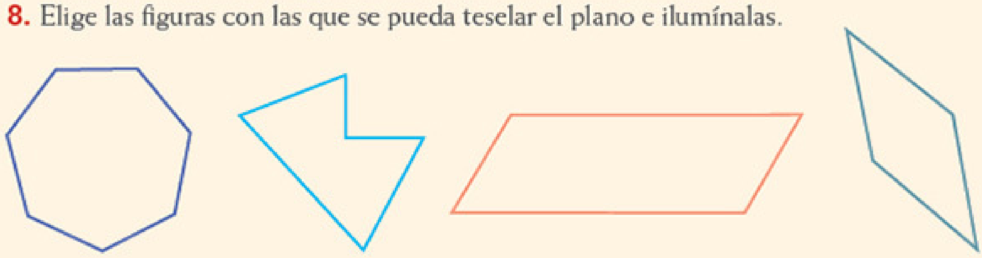

**b.** $x=$ __________




7. Construye un nonágono regular inscrito en la circunferencia y, junto a él, un hexágono regular cuyos lados midan 2 cm.

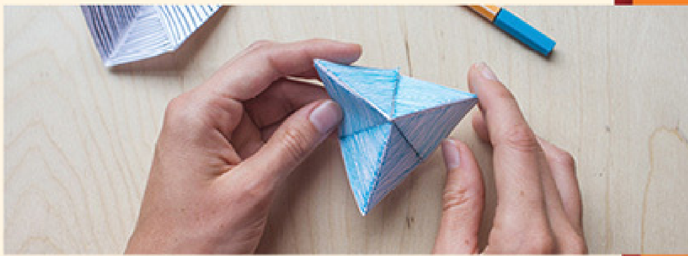


8. Elige las figuras con las que se pueda teselar el plano e ilumínalas.



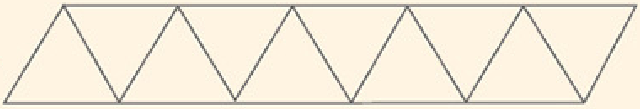
# Logro ir **más allá**

El descubrimiento de los **flexágonos**, objetos geométricos, se debe a un joven estudiante de la Universidad de Princeton, Inglaterra, en 1939, quien de manera fortuita dio pie al estudio de estos cuerpos. En 1962 se publicó un artículo con toda la teoría matemática y su formalización. Sorprendente, ¿verdad?



1. En una cuarta parte de una hoja tamaño carta, dibuja 10 triángulos equiláteros como se muestra en la figura **a**:

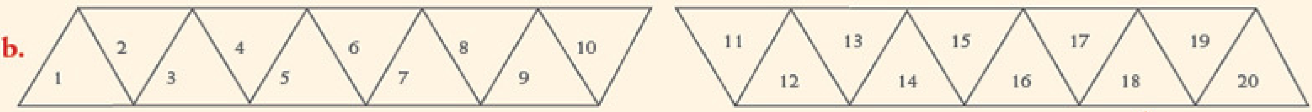
**a.**



❖ Marca cada lado de los triángulos para poder doblarlos.
❖ Numera cada triángulo como se muestra en la figura **b**:

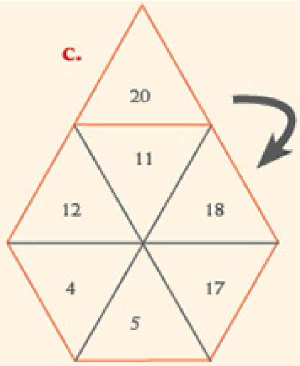
Frente — Atrás

**b.**




⇨ Sigue las instrucciones para armarlo:
❖ Los triángulos etiquetados con 1, 2 y 3 se doblan hacia atrás, a lo largo del lado que comparten los triángulos 3 y 4; los triángulos 12 y 11 quedarán hacia arriba.
❖ Los triángulos 7, 8, 9 y 10 deben doblarse hacia el frente, a lo largo del lado que comparten los triángulos 6 y 7.
❖ El triángulo 11 queda cubierto por el triángulo 19; intercambia y coloca el número 11 arriba.

**c.**



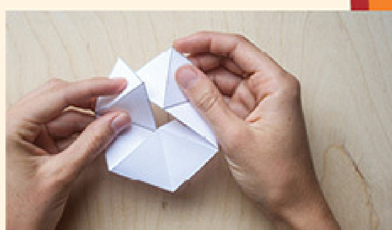

⇨ Comprueba que has seguido los pasos. Compara tu flexágono con el esquema que se muestra en la figura **c**:
❖ Dobla el triángulo 20 de manera que cubra al triángulo 11 y el triángulo 10 quede arriba.
❖ Pega los bordes de los triángulos 10 y 11.

¡Listo! Ahora "aprieta" dos triángulos adyacentes que no compartan lado y descubre más caras del flexágono abriéndolo desde el centro.

La figura de la derecha se llama **hexaflexágono**; decora las dos caras expuestas con distintos colores o motivos e intenta doblarla y abrirla de distintas formas; así encontrarás más caras.

- ¿Cuántas caras encontraste?

2. Muestra tu hexaflexágono a tus compañeros y compartan su opinión sobre la relevancia de este descubrimiento para las matemáticas y el arte.



**Utilizo las TIC**

En la siguiente página encontrarás un artículo con la historia y más datos interesantes sobre los flexágonos. cmed.mx/m226

L10

# Probabilidad teórica

Los **experimentos aleatorios** son aquellos que, si los repetimos varias veces con las mismas condiciones iniciales, no pueden garantizar siempre los mismos resultados. Por ejemplo, al lanzar una moneda no sabemos si caerá águila o sol.

Exploro

**Determino qué evento es más probable que ocurra al realizar un experimento aleatorio.**

El dominó es un juego de mesa que consta de 28 fichas rectangulares divididas en dos cuadrados. En cada cuadrado se representan, con puntos, números entre el 1 el 6 y el cero, como muestra el juego de la izquierda.

1. Analiza la siguiente situación:

Cuatro amigos colocan las fichas de un dominó, obsérvalas en la figura, con la cara hacia abajo y cada uno toma una ficha al azar; quien voltee la ficha con mayor puntuación (suma de los puntos de cada ficha) gana un punto.

- Si Alejandra obtuvo una ficha con un seis en seis de nueve veces que volteó una ficha, ¿cuál fue la probabilidad frecuencial de sacar un seis para ella? ¿Cómo la obtuviste?
- Ignacio sacó una ficha con un número tres, en cinco de 12 experimentos. ¿Cuál fue la probabilidad frecuencial de sacar un tres para Ignacio?
- La probabilidad frecuencial permite anticipar qué evento sucederá al realizar nuevamente el experimento. ¿Por qué?

**GLOSARIO**

**Mula.** Así se reconocen las fichas del dominó con igual número de puntos en ambos lados.

Durante el juego, comentaron lo siguiente acerca de la probabilidad:

- Alejandra: "Al voltear una ficha es más probable que salga la **mula** de seis, porque es la ficha con más puntos".
- Ignacio: "Si se suman los puntos de las fichas, yo creo que es más probable voltear una ficha cuyos puntos sumen seis".
- Fernanda: "Para mí es más probable sacar una ficha con dos números diferentes que sacar una mula".
- Luis: "Es más probable voltear una ficha que en una de sus caras tenga tres puntos".

- ¿Cuáles de las afirmaciones son falsas? Explica por qué.
- ¿Cuáles de las afirmaciones son verdaderas? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué número es más probable obtener en una cara de la ficha? ¿Por qué?

**Leo +**

Ingresa a la página: cmed.mx/m227, donde encontrarás más información sobre el origen del dominó y las reglas y estrategias para jugarlo.

Contrasta tus respuestas con las de otros compañeros. Si tuvieran que asignar un número a la probabilidad de sacar un tres, ¿cuál usarían? ¿Qué número le asignarían al evento "sacar una mula"? ¿Cómo registrar la probabilidad de un evento? Comenten en el grupo sus respuestas y registren sus conclusiones.

Descubro y construyo

I. **Represento los resultados de un experimento aleatorio y los comparo con la probabilidad frecuencial al realizar el experimento.**

El espacio muestral de los posibles resultados al sumar los puntos de las fichas de dominó es: E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

1. Completen, en parejas, los siguientes espacios, representando las fichas con las que es posible obtener la suma de puntos que se muestra.

Cero: Uno: Dos: Tres: Cuatro:

Cinco: Seis: Siete:

Ocho: Nueve: Diez: Once: Doce:

2. Anoten la razón: veces que se repite la suma/total de resultados, para cada suma posible de las fichas del dominó .

0: $\frac{1}{28}$ 1: ______ 2: ______ 3: ______ 4: ______ 5: ______ 6: ______

7: ______ 8: ______ 9: ______ 10: ______ 11: ______ 12: ______

Ordenen los puntos de mayor a menor de acuerdo con la fracción correspondiente.

- Si realizan el experimento 50 veces, ¿qué suma de puntos consideran que salga más veces? Expliquen por qué. ______
- ¿Cuál o cuáles son los números de puntos que consideran que salgan menos veces? ______

3. Analicen la siguiente situación y completen los datos que faltan en la tabla.
Benita y sus amigas realizaron, en una hoja de cálculo electrónica, el experimento de tomar 200 veces una ficha de dominó al azar y registraron las sumas de puntos.

| Suma de puntos | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia absoluta | 6 | 8 | 12 | 11 | 24 | 26 | 30 | 23 | 24 | 13 | 10 | 6 | 7 | |
| Frecuencia relativa | | | | | | | | | | | | | | |

- ¿Cuál es la suma de puntos que se repitió más veces? Escriban, con número decimal, las fracciones de la tabla y las de la actividad 2.
- ¿Qué relación hay entre los números decimales de la tabla y los respectivos de la actividad 2?

Comenten qué relación observan entre las fracciones de la actividad 2 y la frecuencia relativa en el experimento. ¿Conocer cuántas veces puede ocurrir un experimento ayuda a anticipar su probabilidad frecuencial?

**GLOSARIO**

**Espacio muestral.** Es el conjunto de todos los posibles resultados (o eventos) de un experimento aleatorio. El espacio muestral (E) de la suma de los puntos al lanzar dos dados es: E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

**Frecuencia absoluta.** Número de veces que se repite un dato o que ocurre un evento al realizar un experimento aleatorio una cierta cantidad de veces.

**Frecuencia relativa.** Es igual a la frecuencia absoluta entre el total de resultados de un experimento aleatorio. Se puede representar como fracción o como número decimal.

## II. Simulo un experimento aleatorio, registro los resultados y los comparo con la probabilidad clásica o teórica.

**GLOSARIO**

**Simulación.** Configuración de situaciones similares a las que se producen en un contexto real, con la finalidad de utilizarlas como experiencia de aprendizaje o como procedimiento para la evaluación.

1. En equipos, lean la siguiente situación y resuelvan.
   Néstor es futbolista y es el encargado en su equipo de tirar los penaltis. En el último torneo anotó cuatro de cada cinco penaltis que tiró.
   - Si continúa con esta tendencia, ¿cuántos goles debería anotar si tira 20 penaltis? Argumenten su respuesta.
   - ¿Cuántos goles anotaría si tirara 50 penaltis? Escriban su predicción.

2. Consideren lo conseguido por Néstor como un experimento aleatorio y simulen la situación para validar si su predicción coincide con la probabilidad frecuencial.
   - Elaboren cinco papelitos: cuatro que digan "penalti anotado" y uno que diga: "penalti fallado", y colóquenlos en una bolsa opaca.
   - Extraigan un papelito, registren su resultado y devuélvanlo a la bolsa.
   - Repitan el experimento 50 veces y después 100 veces, y registren sus resultados en las siguientes tablas. Para agilizar la actividad, cada quien haga por su cuenta cierto número de extracciones hasta completar las 50 y luego las 100 extracciones.

   - 50 extracciones:

| Goles anotados | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|---|---|---|
| Penalti anotado | | |
| Penalti fallado | | |

   - 100 extracciones:

| Goles anotados | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|---|---|---|
| Penalti anotado | | |
| Penalti fallado | | |

   - ¿Qué tan cerca estuvo su predicción de los resultados del experimento en cada caso?

3. Respondan de acuerdo con el experimento de la actividad 2.
   - ¿Cuál es la **probabilidad teórica** para el evento: "penalti anotado"?
   - ¿Cuál es la probabilidad teórica para el evento: "penalti fallado"?
   - ¿Qué relación hay entre la probabilidad teórica y la probabilidad frecuencial en los experimentos que realizaron?
   - De acuerdo con la probabilidad teórica, al realizar 100 extracciones, ¿cuántas veces se espera que ocurra cada evento? ¿Qué hicieron para determinarlo?

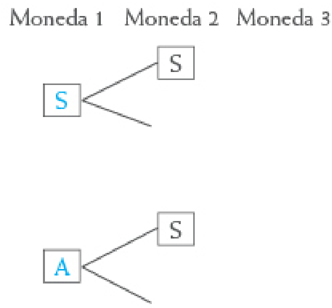
Comparen sus respuestas con el resto del grupo. Comenten las similitudes entre la probabilidad teórica y la frecuencial. ¿Por qué es importante conocer la probabilidad teórica al realizar un experimento aleatorio?

### Tomo Nota

En un experimento aleatorio, se conoce como **probabilidad teórica** o **clásica** de un evento al número de resultados favorables del evento dividido entre el total de posibles resultados del experimento. Es decir, es igual al cociente de resultados favorables entre el número total de resultados posibles. Por ejemplo, al lanzar un dado la probabilidad teórica de sacar un uno es: una entre seis posibles resultados (1/6).

## III. Anticipo los resultados de un experimento aleatorio al calcular la probabilidad teórica y los comparo con la probabilidad frecuencial

Vanesa y Andrea juegan a lanzar tres monedas al aire para determinar quién se queda con un libro que les regalaron. La que obtenga más resultados favorables, de acuerdo con su elección, se queda con el libro.




1. Completen, en parejas, el diagrama de árbol de la derecha que muestre todos los posibles eventos. Después, representen, el espacio muestral del experimento.

E = {________________________________________________}

- ¿Cuántos resultados diferentes tiene el experimento?
- ¿De cuántas maneras diferentes puede ocurrir el evento: dos águilas y un sol?

2. Anoten la probabilidad teórica de la ocurrencia de cada evento del experimento, como fracción y como número decimal.

| Probabilidad teórica = $\frac{\text{Resultados favorables}}{\text{Total de resultados}}$ | | | |
|---|---|---|---|
| Tres soles | Dos soles, un águila | Dos águilas, un sol | Tres águilas |
| | | | |

3. Realicen el experimento de lanzar tres monedas al mismo tiempo 100 veces y registren los resultados en la siguiente tabla.

| Evento | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|---|---|---|
| Tres soles | | |
| Dos soles, un águila | | |
| Dos águilas, un sol | | |
| Tres águilas | | |

4. Junten sus resultados con los de otra pareja y regístrenlos en una misma tabla. Después, anoten los resultados con los de otro equipo y regístrenlos en una nueva tabla.

- ¿Qué relación observan entre la probabilidad frecuencial que obtuvieron, en los tres casos, con la probabilidad teórica de los resultados del experimento?
- De acuerdo con la probabilidad teórica, si realizan el experimento 400 veces, ¿cuántas veces se espera que suceda cada evento?

Comparen sus resultados y estrategias de solución con otros equipos. ¿Qué sucede con la probabilidad frecuencial cuantas más veces se repite un experimento aleatorio?

## IV. Determino la probabilidad teórica de un experimento aleatorio y la utilizo para anticipar la probabilidad frecuencial de los resultados del experimento.

1. Realicen la siguiente actividad en parejas. Necesitan dos dados de seis caras. Un grupo de amigos juega "carreras" en un tablero como el siguiente. Cada jugador elige un número al azar del 1 al 12. El juego consiste en lanzar los dos dados y sumar los puntos que salgan. Quien tenga ese número avanza una casilla. Gana el primero en llegar a la meta.

**Utilizo las TIC**

Ingresa a: cmed.mx/m117, donde podrás simular el juego de lanzar dos dados y sumar los resultados además de obtener la gráfica correspondiente.

| | | | | | | | | | | | Meta |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

- Si participaran en el juego, ¿qué número elegirían? ¿Por qué?
- ¿Qué número no tiene ninguna posibilidad de ganar? Expliquen por qué.

2. Representen en su cuaderno todos los posibles resultados de lanzar dos dados y escriban la probabilidad teórica de obtener cada número en la siguiente tabla. Consideren que (2, 1) y (1, 2) son resultados diferentes.

| Suma en los dados | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidad teórica | | | | | | | | | | | | |

- ¿Qué número tiene más probabilidad de ganar el juego?
- Si se lanzan los dados 36 veces, ¿cuántas veces se espera que la suma sea 5?
- ¿Y cuántas el 2 o el 12?
- Si lanzan los dados 100 veces, ¿cuántas veces se espera que la suma sea siete?
- ¿Qué criterio siguieron para determinarlo?

3. Jueguen una partida. Lancen los dados hasta que un número llegue a la meta; cuenten las veces que los lanzaron.
   - ¿Qué número ganó? ¿Cuántas veces lanzaron los dados?
   - Anoten en su cuaderno la probabilidad frecuencial de cada número obtenido en el juego y compárenla con la probabilidad teórica correspondiente.
   - Si el juego se realizara con un dado, ¿qué número tendría más probabilidades de ganar? ¿Por qué?

Compartan sus resultados y compárenlos. ¿Obtuvieron lo mismo? ¿A qué se debe? Junten todos los resultados y calculen la probabilidad frecuencial. ¿Qué sucedió con ésta comparada con la probabilidad teórica? ¿En qué caso son más parecidas?

### Tomo Nota

Cuantas más veces se repite un experimento aleatorio, la probabilidad ____________ tiende a parecerse o acercarse más a la probabilidad __________.

Para anticipar las veces que se espera suceda un evento en *x* número de repeticiones: si la probabilidad es $\frac{4}{6}$, entonces el resultado favorable es: ________.

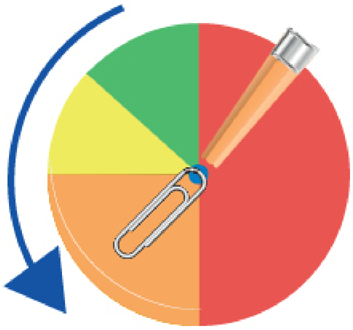
## V. Calculo la probabilidad teórica de diferentes eventos en experimentos aleatorios.

1. Retoma los resultados del lanzamiento de dos dados y responde.
   Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea un número par?

   - ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dados sea un número menor que 5?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 1 en alguno de los dados?

2. Observa la ruleta. Considera la medida del ángulo de cada sector y responde:

   - Al girar la ruleta, ¿cuál es la probabilidad de que la flecha caiga en cada color?
     Amarillo: _______ Naranja: _______ Verde: _______ Rojo: _______
   - Si se gira 50 veces la ruleta, ¿cuántas veces se espera que caiga en el color naranja?
   - Si se gira 100 veces, ¿cuántas veces se espera que caiga en el color rojo?
   - Si se gira 500 veces, ¿cuántas veces se espera que caiga en cada color?
     Amarillo: _______ Naranja: _______ Verde: _______ Rojo: _______



Validen sus resultados con los de otros compañeros bajo la supervisión del maestro. Dibujen en cartulina una ruleta como la que se muestra; usen un clip y un lápiz para apoyarla y hacerla girar.

### Practico

1. Al lanzar una moneda y dos dados, de seis caras, al mismo tiempo...
   - ¿Cuál es la probabilidad teórica de obtener 3 y sol?
   - ¿Cuál es la probabilidad teórica de obtener águila y un número mayor que 8?
   - Si la moneda y los dados se lanzan 150 veces, ¿cuántas veces se espera que caiga sol? ¿Cuántas veces saldrá 12? ¿Cuántas veces saldrían águila y 12 al mismo tiempo?
   - ¿Qué es más probable, que se obtenga un número par o uno impar?

2. En un grupo de segundo de secundaria, el primer apellido de los estudiantes de la lista es: Aguilar, Cuevas, García, González, Mendoza, Ávalos, Urrutia, Abascal, Vargas, García, Pérez, Elizondo, Méndez, Morán, Encinas, Morales.
   - Si el maestro elige un alumno al azar para que pase al pizarrón, ¿cuál es la probabilidad de que su apellido empiece con vocal?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que su apellido empiece con A?
   - ¿Cuál es la probabilidad de obtener un apellido que se repite?
   - Supongan que un día faltó Vargas; ¿cuál es la probabilidad de que el maestro llame a alguien cuyo apellido empiece con consonante?

**Utilizo las TIC**

Ingresa al sitio de Internet: cmed.mx/m228 y calcula la probabilidad teórica de los experimentos que allí se enlistan.

## Recapitulo

1. Un experimento aleatorio es aquel en el que no se puede tener certeza de lo que va a ocurrir.
2. El espacio muestral representa el conjunto de todos los posibles resultados (o eventos) de un experimento aleatorio.
3. La probabilidad frecuencial es el número de veces que ocurre un evento al realizar un experimento aleatorio, dividido entre el número de experimentos realizados. Es igual al número de eventos favorables/total de experimentos realizados.
4. La probabilidad teórica o clásica es el número de resultados favorables de un evento comparado con todos los resultados posibles del experimento. Es igual al cociente del número de resultados favorables entre el número total de resultados.
5. Cuantas más veces se repite un experimento aleatorio, la probabilidad frecuencial se parece más a la probabilidad teórica.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

1. Considera el experimento de lanzar de manera simultánea un dado y una moneda.

   Anota el espacio muestral del experimento:
   E = {________________________________________}

   - ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila y el número 6?
   - ¿Cuál es la probabilidad de obtener sol y un número par?

2. En una bolsa hay 45 canicas, de las cuales 18 son verdes, 12 azules y 15 blancas.

   - Si se saca una canica al azar, ¿cuál es la probabilidad teórica de sacar una canica verde?
   - ¿Cuál es la probabilidad teórica de sacar azul?
   - ¿Y de sacar una canica blanca?

   Simula el experimento: elabora papelitos con el color de las canicas y colócalos en una bolsa.
   - Si realizas el experimento 100 veces, ¿cuántas veces se espera que salga una "canica azul" ?
   - ¿Cuántas veces se espera que salga "canica blanca" si se realiza el experimento 450 veces?
   - Si se espera que al realizar el experimento salga 80 veces "canica verde", ¿cuántas veces se llevaría a cabo el experimento?

3. Registra en papelitos el primer apellido de integrante de tu salón y el tuyo (sin importar que se repitan). Colócalos en una bolsa y realiza el experimento de sacar un papelito. Registra el resultado.

   - ¿Cuál es la probabilidad de sacar un papelito cuyo apellido empiece con consonante?
   - ¿Cuál es la probabilidad de sacar un apellido que termine en vocal?
   - ¿Cuál es la probabilidad de sacar un apellido cuya letra inicial se repita?

   a. Elige cuántas veces puede suceder cada uno de los eventos anteriores si realizas el experimento 20, 50 y 100 veces.

   b. Realiza el experimento y calcula la probabilidad frecuencial de cada evento.

# Logro ir **más allá**

El concurso de *Monty Hall* es un problema de probabilidad; su nombre se debe al de su presentador, y está inspirado en el concurso televisivo estadounidense *Hagamos un trato*, muy popular entre 1963 y 1986.

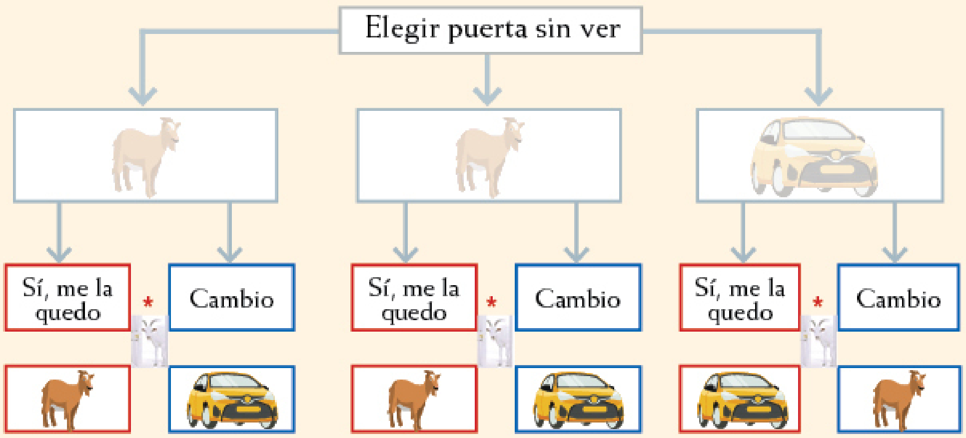
En este concurso el participante tiene que escoger una de tres puertas y gana lo que se encuentra detrás de ella. En una de las puertas se oculta un coche y en las otras dos una cabra.

- ¿Cuál es la probabilidad de elegir la puerta con el coche?
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir una cabra?

Después de que el concursante elige una puerta, el presentador, que sabe dónde está el coche, abre una puerta donde hay una cabra y pregunta al concursante si quiere cambiar o desea conservar la puerta que eligió al principio.

- Después de que el presentador abre la puerta, ¿la probabilidad de haber escogido el coche se mantiene o cambia? Explica por qué.
- ¿Tú cambiarías o te quedarías con la misma puerta?

El siguiente diagrama muestra las opciones de ganar el concurso si se elige cada una de las opciones y si se cambia o se conserva la misma puerta.




* El presentador abre la puerta donde sabe que hay una cabra.

- De acuerdo con el esquema, ¿cuál es la probabilidad de ganar si se conserva la misma puerta?
- ¿Y si se cambia de puerta?

**Utilizo las TIC**

Después de contestar las preguntas e intercambiarlas con tus compañeros, ingresa a cmed.mx/m229, donde encontrarás más información sobre el juego de Monty Hall y podrás simular tus elecciones. Valida tus conjeturas.

# EVALUEMOS LO APRENDIDO

Revisa tu **Itacate de evidencias** antes de realizar tu evaluación.

## Reconoce tus emociones

Comparte aquí tus reflexiones sobre el texto: "Energía para movernos" y las emociones que provocó en ti, antes de resolver las situaciones planteadas en el numeral **III** de esta evaluación.

- ¿Qué es para tí lo más importante de esta idea?

*La ciencia más útil es aquella cuyo fruto es el más comunicable.*

- ¿Qué sabes de Leonardo da Vinci, el autor de esta idea? Indaga sobre sus contribuciones a las matemáticas.

**I. Selecciona la opción correcta. En pareja, compara tus respuestas y procedimientos.**

1. Ximena dio $2\frac{1}{2}$ vueltas a una pista de atletismo que mide 2.35 km. ¿Qué distancia recorrió Ximena?

   a. $4\frac{2}{3}$ km  b. $5\frac{29}{60}$ km  c. 3.875 km  d. 5.403 km

2. El área de un terreno mide $\frac{3}{8}$ m². Si la base tiene $\frac{5}{8}$ m, ¿cuánto mide su altura?

   a. $\frac{5}{6}$ de m  b. $\frac{10}{6}$ de m  c. $\frac{3}{5}$ de m  d. $\frac{3}{4}$ de m

3. ¿Qué número multiplicado por –3.5 es igual a 0.945?

   a. 0.27  b. –0.43  c. –0.27  d. 0.43

4. ¿Cuál es el resultado de la operación: $[(2.5 \times (-7) + 12) + 24 \div (-6) - 15] \times 2$?

   a. –49  b. 79  c. –24.5  d. 39.5

5. Un automóvil realiza un recorrido de 3.5 horas, avanzando a una velocidad constante de 90 $\frac{km}{h}$. Si viaja a 75 km por hora, ¿en cuánto tiempo realizará el mismo viaje?

   a. 4.6 horas  b. 2.9 horas  c. 3.1 horas  d. 4.2 horas

6. Manuel preparó un bote de pintura con 2.5 L de pintura blanca y 5.5 L de pintura azul. Si quiere preparar una cubeta de 24 L con el mismo tono, ¿cuántos litros de pintura blanca necesita?

   a. 6.5 L  b. 8 L  c. 7.5 L  d. 16.5 L

7. María tiene pollos y conejos en su granja. Si en total tiene 28 animales que suman 82 patas, ¿cuántos animales tienen de cada uno?

   a. 16 conejos y 12 pollos  b. 15 conejos y 13 pollos

   c. 14 conejos y 14 pollos  d. 13 conejos y 15 pollos

8. ¿En cuál de los siguientes polígonos regulares la suma de sus ángulos interiores es de 900°?

   a. Octágono  b. Hexágono  c. Pentágono  d. Heptágono

9. El teselado 6, 6, 6 es aquel en el cual las tres figuras que coinciden en un vértice son hexágonos regulares. El teselado hecho con cuadrados se llama 4, 4, 4, 4 porque-son 4 cuadrados los que coinciden en un mismo vértice. ¿Con cuál de las siguientes opciones no se puede formar un teselado?

a. 3, 4, 6, 4  b. 4, 6, 12  c. 4, 3, 3, 6  d. 8, 4, 8

10. Si se lanzan dos monedas y un dado al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad teórica de que salgan dos águilas y el número 3?

a. $\frac{1}{6}$  b. $\frac{1}{24}$  c. $\frac{1}{36}$  d. $\frac{1}{12}$

**II. Resuelve los siguientes problemas.**

1. Pablo tiene que cortar un tubo de $3\frac{1}{2}$ m en 8 tramos del mismo tamaño. ¿Cuánto debe medir cada tramo?
2. Pedro compró 3 plumas y 4 lápices, por los que pagó $48.00. Si Laura compró 2 plumas y 3 lápices iguales a los de Pedro y pagó $34.00, ¿Cuánto cuesta cada producto?

**III. Lean, en grupo, el texto de inicio del Módulo 1 y contesten:**

1. Un foco normal consume $\frac{1}{3}$ de kwh. Si un foco ahorrador consume $\frac{2}{15}$ de kwh:
   - ¿Qué parte de un foco normal consume uno ahorrador?
   - Si un foco normal consume 25 kwh en cierto tiempo, ¿cuántos kwh consume un foco ahorrador en el mismo tiempo?

2. El precio de la luz se cobra en tres categorías: básico, intermedio y alto. El costo por kwh en el servicio básico es de $0.79 (cubre hasta 150 kwh de consumo), y en el intermedio (hasta 280 kwh) el costo por kwh es de $0.950; a estos costos se les agrega el IVA.

   - Si en una casa se consumen 165 kwh, ¿cuánto se tiene que pagar considerando los costos anteriores más 16% de IVA?

3. El recibo de luz de un condominio de tres departamentos llega por $900.00. En un departamento viven 4 personas, en otro 3 personas y en el último una sola. ¿Cuánto deberá pagar cada departamento si el aporte tiene que ser directamente proporcional al número de personas?

   - Si un foco de 100 w gasta 0.1 kwh, ¿cuántos focos de 100 w se necesitan para igualar el consumo de luz de tu casa? Realiza la operación con fracciones.

**IV. Verifiquen, en parejas, que completaron correctamente los Tomo nota de este Módulo.**

**Utilizo las TIC**

Entra a la liga para medir tu huella ecológica y calcula tu costo económico de euros a pesos: cmed.mx/m276
En grupo, comenten cómo pueden cambiar sus hábitos para consumir menos electricidad en casa.

## Mis logros y metas

Como ya tienes completo y revisado tu **Itacate de evidencias**, puedes fácilmente reconocer lo que has aprendido. Completa el cuadro con lo que se pide en cada caso. Apóyate en la **Ruta de aprendizaje.** Escribe lo que se pide en cada caso.

| INDICADOR DEL LOGRO | LO SÉ<br>Tengo el conocimiento | | LO SÉ HACER<br>Desarrollé las habilidades para representar y seguir procedimientos | |
|---|---|---|---|---|
| | Sí | Aún no, ¿qué me falta por aprender? | Sí | Aún no |
| **Resuelvo** problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos. | | | | |
| **Resuelvo** problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales, positivos y negativos. | | | | |
| **Resuelvo** problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional. | | | | |
| **Resuelvo** problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. | | Este aprendizaje se concluye en el Módulo 3. | | |
| **Deduzco** y **uso** las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares. | | | | |
| **Determino** la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio. | | | | |

| LO VALORO | | COMENTARIOS |
|---|---|---|
| Sí | No | ¿Cómo lo lograré? |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

## Habilidades del siglo XXI

Marca con una (✓) las habilidades que consideres que has alcanzado:

- [ ] Confío en mí
- [ ] Percibo mis emociones
- [ ] Soy responsable
- [ ] Muestro empatía
- [ ] Tengo sentido de comunidad
- [ ] Me comunico
- [ ] Colaboro / participo
- [ ] Me adapto
- [ ] Muestro creatividad
- [ ] Muestro curiosidad e interés
- [ ] Tengo iniciativa
- [ ] Soy persistente
- [ ] Planteo metas positivas
- [ ] Resuelvo problemas
- [ ] Manejo la información
- [ ] Uso los medios
- [ ] Manejo la tecnología
- [ ] Soy consciente del mundo natural y social

*No hay árbol que el viento no haya sacudido.*

Proverbio hindú

**Utilizo las TIC**

Para entender cómo se produce energía a partir de la fuerza del viento, observa el video y lee la información contenida en la siguiente página: cmed.mx/m263

# La fuerza del viento

La Agencia Internacional de Energías Renovables estima que para el año 2030 un mínimo del 35% de la energía consumida en la Unión Europea deberá provenir de energías renovables como la solar o la eólica.

¡Ya no tenemos que esperar para usar estas energías pues todas ellas son redituables hoy en día! La energía del viento, o eólica, que se utilizó por primera vez con los barcos de vela y los molinos de viento, tiene grandes expectativas de desarrollo para la generación de electricidad, dadas sus ventajas respecto a otras fuentes en términos de abundancia y limpieza en su utilización.

La electricidad es una de las principales formas de energía del mundo actual; se usa en las comunicaciones, el transporte y el abastecimiento de todo tipo de productos. La mayoría de los servicios en casas, oficinas y fábricas dependen de la energía eléctrica.

La energía eólica que se puede producir en el mundo (capacidad instalada) se situó, en 2017, en 539 581 MW. Los 10 países a la vanguardia son: China 188 232 MW (35%), Estados Unidos 89 077 MW, Alemania 56 132 MW, India 32 848 MW, España 23 179 MW, Gran Bretaña 18 872 MW, Francia 13 759 MW, Brasil 12 763 MW, Canadá 12 239 MW e Italia con 9 479 MW

¿Puedes imaginar el área total que ocupan estos generadores eólicos?

Nota: 1 MW = 1 000 000 W

Reflexiona sobre esta nota porque la retomarás en la evaluación final del Módulo.

**Eje**

# Número, Álgebra y Variación

**Tema**

## Multiplicación y división

**Aprendizaje esperado**

Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

**Lección**

11 Potencias y raíz cuadrada

12 Producto de potencias y potencias de potencias

13 Cocientes de potencias y exponentes negativos

14 Potencias de base 10

## Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes

**Aprendizaje esperado**

Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

**Lección**

15 Expresiones algebraicas equivalentes

## Ecuaciones

**Aprendizaje esperado**

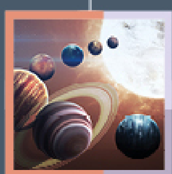
Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

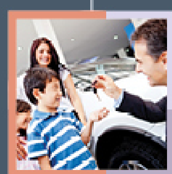
**Lección**

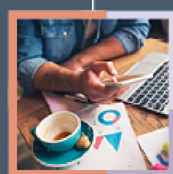
16 Solución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales de $2 \times 2$

**Logro ir más allá**

**Proyecto**







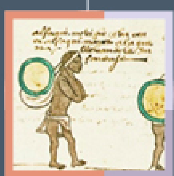
## Forma, Espacio y Medida

### Magnitudes y medidas

Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

**17** Resolución de problemas que implican conversiones entre unidades de longitud, masa y capacidad

**18** Conversión entre unidades del Sistema Inglés y unidades del SI



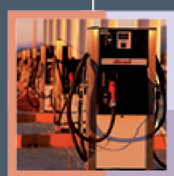
## Análisis de Datos

### Estadística

Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

**19** Histogramas y polígonos de frecuencia

**20** Representación de información en gráficas de línea



L11

# Potencias y raíz cuadrada

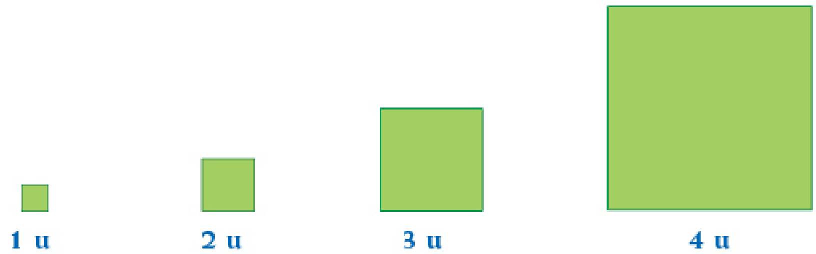
Así como algunas multiplicaciones se pueden obtener como la suma iterada de un número, es decir, $5 \times a = a + a + a + a + a = 5a$, de la misma manera las **potencias enteras** son representaciones simplificadas de multiplicaciones iteradas del mismo número.

Exploro

## Resuelvo problemas que implican el cálculo de áreas de cuadrados.

Emmanuel trazó la siguiente sucesión de cuadrados.

1. Analiza las figuras y resuelve.




Considera la medida de sus lados y escribe los primeros 10 valores que correspondan al perímetro de la sucesión de figuras.

| Figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Perímetro (u) | | | | | | | | | | |

- ¿Cuál es la regla de la sucesión que se genera?
- ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de un cuadrado de lado $l$?

Ahora considera el área de las figuras y escribe los primeros 10 valores de la sucesión que se genera:

| Figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área ($u^2$) | | | | | | | | | | |

- ¿Qué operación te permitió obtener el área de cada figura?
- ¿Cuál es el área de la figura $n$ de la sucesión?
- ¿A qué figura de la sucesión le corresponde un área de 225? Explica cómo obtuviste el resultado.
- ¿La medida 250 formará parte del área de una figura de la sucesión? ¿Por qué?

Comenten en equipo lo siguiente: si el área de un cuadrado de 3 cm de lado es igual a 9 $cm^2$, ¿cómo podrían representar de manera simplificada el área de un cuadrado cuyos lados miden $a$? ¿Cómo pueden obtener la medida de los lados de un cuadrado si se conoce la medida de su área? Registren sus acuerdos en el cuaderno.

Descubro y construyo

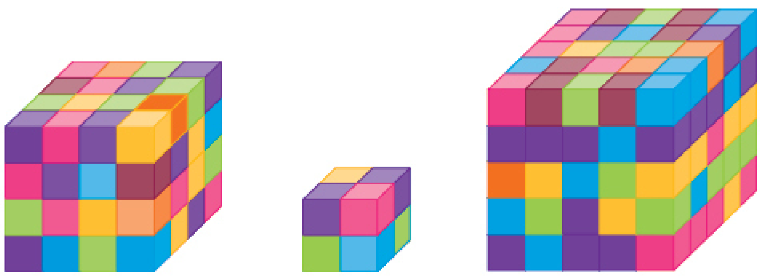
## I. Represento multiplicaciones de factores iguales como potencias.

Como sabes, el área de un cuadrado se obtiene multiplicando la medida de un lado por sí misma. Por ejemplo, el área de un cuadrado de lados $c$ es igual a $c \times c$, que puede expresarse como $c^2$ y se lee "$c$ al cuadrado" o "$c$ elevada a la segunda potencia".

1. Consideren, en parejas, la sucesión de cuadrados de la actividad anterior y escriban los valores que correspondan a las figuras como un número elevado a la segunda potencia:

| Figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área ($u^2$) | | | | | | | | | | | |

Lorenzo elaboró, junto con sus primos, los siguientes objetos con cubos de colores:



Cubo 1 Cubo 2 Cubo 3

2. Resuelvan, a partir de los tres cubos, lo siguiente:
   - ¿Qué operación permite conocer el volumen de un cubo?
   - Considerando que en el caso de los cuadrados el área representa un número elevado a la segunda potencia, ¿qué potencia le correspondería al volumen de un cubo? Justifiquen su respuesta.
   - ¿Cuántos cubos tiene cada figura por lado o **arista**?
     Cubo 1: ____________ Cubo 2: ____________ Cubo 3: ____________

   Escriban la operación que permite calcular el volumen de cada cubo:
   Cubo 1: ____________ Cubo 2: ____________ Cubo 3: ____________

   Ahora, escriban como una potencia el número de cubos de cada figura:
   Cubo 1: ____________ Cubo 2: ____________ Cubo 3: ____________

   - ¿Cuántos cubos forman cada figura?
     Cubo 1: ____________ Cubo 2: ____________ Cubo 3: ____________

   - Si un cubo tiene $m$ "cubitos" en cada dimensión, ¿qué expresión, como potencia, representa su volumen?

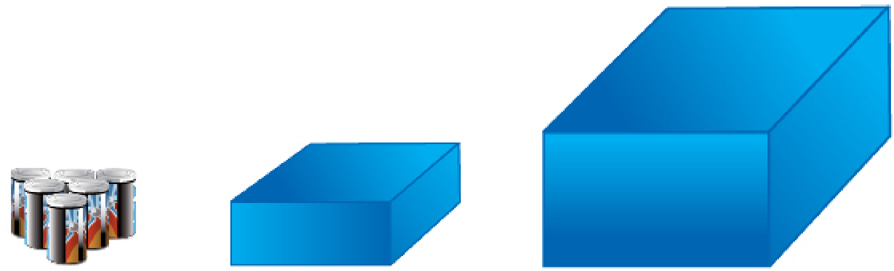
GLOSARIO

**Arista.** Segmento de recta donde se encuentran dos caras de un cuerpo geométrico.

## Tomo Nota

Una potencia entera es una manera abreviada de representar una multiplicación iterada (repetida) del mismo factor. Por ejemplo, la multiplicación $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ puede representarse como una potencia: $3^4$ (tres a la cuarta potencia), donde el 3 es la base (número que se repite) y el 4, el exponente (número de veces que se multiplica la base).

En una fábrica transportan las latas de jugo en paquetes de 6 piezas, que a su vez se guardan en cajas que contienen 6 paquetes, que se guardan en cajas más grandes que contienen 6 cajas cada una, como se muestra en las siguientes imágenes:



1 paquete 6 paquetes 6 cajas

3. Resuelvan a partir de la información anterior.
   - ¿Cuántas latas de jugo contiene cada caja grande?
   - ¿Qué operaciones hicieron para determinarlo?
   - ¿Cómo representarían el número de latas como potencia?
4. Consideren que las cajas grandes se guardan en contenedores con 6 cajas cada uno y que en las camionetas para transportar los jugos caben 6 contenedores.
   - ¿Qué operación permite calcular el número de latas que caben en una camioneta?
   - ¿Qué expresión, como potencia, representa la situación anterior?
   - ¿Cuántas latas caben en una camioneta?
   - ¿Qué expresión, como potencia, representa el número de latas que caben en 6 camionetas?
   - ¿Qué multiplicación corresponde a la situación anterior?

Comparen sus respuestas con las de otra pareja. ¿Qué ventajas tiene representar una multiplicación como potencia? ¿En qué circunstancias podrían usar potencias para representar la situación? ¿Cómo pueden representar un número $m$ elevado a la potencia $n$? Busquen llegar a acuerdos y registren sus conclusiones en su cuaderno.

## Utilizo las TIC

Usa tu calculadora para calcular potencias.

Oprime el número base y después la tecla $x^y$; luego oprime el número que corresponda al exponente y después la tecla = .

Ingresa a la página: cmed.mx/m230; resuelve los ejercicios de potencias y comprueba tus respuestas.

## Practico

1. Representa las siguientes multiplicaciones como una potencia.

a. $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 =$ ___ b. $14 \times 14 \times 14 \times 14 \times 14 \times 14 \times 14 =$ ___

c. $11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 =$ ___ d. $26 \times 26 \times 26 \times 26 =$ ___

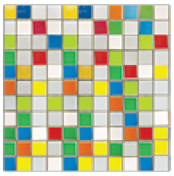
2. Escribe la multiplicación que corresponda a cada potencia y resuélvela.

a. $2^6 =$ ____________________ b. $7^7 =$ ____________________

c. $5^8 =$ ____________________ d. $8^4 =$ ____________________

**II. Calculo la raíz cuadrada positiva de diferentes números enteros y determino cuáles son cuadrados perfectos.**

A Mariana le gusta confeccionar manteles cuadrados y adornar su contorno con encaje, por lo que necesita saber la medida de sus lados. Conoce la medida del área de los manteles, y a partir de ésta tiene que determinar la medida de los lados.

$A = 16\ m^2$  $A = 12\ m^2$  $A = 9\ m^2$ 

1. Analicen en equipos los esquemas de los tres manteles y respondan.
   - ¿Cómo puede Mariana determinar la medida de los lados de cada mantel?
   - En todos los manteles que diseñó, ¿la medida de sus lados es exacta? ¿Por qué?
   - ¿Cuánto encaje necesita para los manteles en los que la medida de los lados es un número entero? Justifiquen su respuesta.
   - ¿Qué medida usarían para calcular la cantidad necesaria de encaje para el otro mantel? Expliquen por qué.

2. Un número entero se conoce como cuadrado perfecto si su raíz cuadrada es un número entero. Por ejemplo, 4 es un cuadrado perfecto porque 2 es su raíz cuadrada. Subrayen los números que representan un cuadrado perfecto y calculen su raíz cuadrada.

   $\sqrt{81}$ = ___ $\sqrt{124}$ = ___ $\sqrt{256}$ = ___ $\sqrt{441}$ = ___

   $\sqrt{328}$ = ___ $\sqrt{576}$ = ___ $\sqrt{784}$ = ___ $\sqrt{165}$ = ___

   - ¿Qué números multiplicados por sí mismos son iguales a 81?

   Todos los números positivos tienen dos raíces cuadradas.
   Escribe un ejemplo para sustentar la afirmación anterior.
   - ¿Qué números son raíz cuadrada de 100?

3. Anoten la raíz cuadrada negativa de cada cuadrado perfecto de la actividad 2.

4. En cada uno de los números que no son cuadrados perfectos, anoten dos números enteros que se aproximen más a la raíz cuadrada de cada caso y cuyo cuadrado sea menor que el número correspondiente.

Comparen sus respuestas con las de otros integrantes del grupo y comenten la estrategia que siguieron para calcular la raíz cuadrada de cada número. ¿Cómo pueden determinar la raíz cuadrada de los números que no son cuadrados perfectos? ¿Alguno tiene una raíz cuadrada exacta? Discutan lo anterior y registren sus acuerdos.

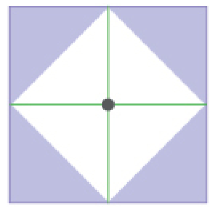
### Tomo Nota

La raíz cuadrada de un número, llamado radicando, es otro número que al elevarse al cuadrado es igual que el primero. La raíz cuadrada positiva se representa con el símbolo $\sqrt{\ }$. Por ejemplo: $\sqrt{4}$ = ___, es decir, ___ es la raíz cuadrada positiva de 4 porque ___ × ___ = 4. Cuando se quiere obtener la raíz cuadrada negativa se usa el símbolo $-\sqrt{\ }$ y si se quieren denotar ambas raíces se usa el símbolo $\pm\sqrt{\ }$.

## III. Calculo la raíz cuadrada de números enteros que no son cuadrados perfectos.

Como vimos en la actividad anterior, no todos los números enteros son cuadrados perfectos, es decir, no todos tienen como raíz cuadrada un número entero. En esos casos, al calcular su raíz cuadrada lo que se obtiene es una aproximación. Por ejemplo, una aproximación a la raíz cuadrada de 18 es 4.2 porque $4.2 \times 4.2 = 17.64$. Y se pueden conseguir aproximaciones más cercanas agregando cifras decimales.

1. Néstor tiene que calcular la medida de la diagonal de un cuadrado cuya área mide 16 cm². Para ello, construyó un cuadrado más grande formado con cuatro de estos cuadrados y trazó en el interior un cuadrado más, como se ilustra a continuación.

Respondan en parejas:

- Respecto a la figura original, ¿qué representan los lados del cuadrado blanco?

Anoten la medida de los lados del cuadrado original:

- ¿Cuál es el área del cuadrado blanco? Expliquen su resultado.
- ¿El área de este nuevo cuadrado representa un cuadrado perfecto? ¿Por qué?
- ¿Qué medida entera usarían como una aproximación de la diagonal del cuadrado original?

Anoten un número con dos cifras decimales que se aproxime a la medida de la diagonal del cuadrado. Justifiquen su resultado.

- ¿Cómo pueden obtener una aproximación de la raíz cuadrada de números que no son cuadrados perfectos?

**Utilizo las TIC**

Hace miles de años, los babilonios calcularon aproximaciones a la raíz cuadrada de números enteros a partir de un rectángulo y usando la media aritmética.

Investiga sobre el método babilonio en http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsa01g01v02/u02t03s02.html y úsalo para calcular las aproximaciones a la raíz cuadrada de las actividades 2 a 4.

2. Completen las expresiones con dos números enteros positivos consecutivos.

a. _____ $< \sqrt{185} <$ _____ b. _____ $< \sqrt{450} <$ _____ c. _____ $< \sqrt{694} <$ _____

3. Ahora, escriban dos números con una cifra decimal para completar cada expresión.

a. _____ $< \sqrt{412} <$ _____ b. _____ $< \sqrt{905} <$ _____ c. _____ $< \sqrt{285} <$ _____

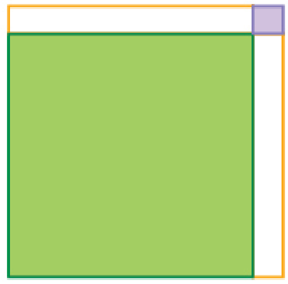
4. Escriban un número con dos cifras decimales que represente una aproximación a la raíz cuadrada. El símbolo ≈ significa "aproximadamente igual a".

a. $\sqrt{412} \approx$ _____ b. $\sqrt{722} \approx$ _____ c. $\sqrt{285} \approx$ _____

Comparen sus estrategias y resultados con los de otras parejas. En caso de que sean diferentes, utilicen la calculadora para validar sus resultados y detectar dónde se cometió el error.

## IV. Calculo cuadrados y raíces cuadradas de números decimales.

1. Analiza el cuadrado de la derecha y resuelve. Considera que el área del cuadrado verde mide 25 $cm^2$ y la del cuadrado morado, 0.36 $cm^2$.



❖ Calcula el perímetro y el área total de la figura.

Perímetro: ______________ Área: ______________

❖ Describe el procedimiento que seguiste para obtener las respuestas.

2. Realiza los siguientes cálculos. Después, responde.

a. $2.4^2$ = ______ b. $0.8^2$ = ______ c. $3.8^2$ = ______ d. $3.6^2$ = ______

e. $\sqrt{1.44}$ = ______ f. $\sqrt{0.49}$ = ______ g. $\sqrt{1.21}$ = ______ h. $\sqrt{0.25}$ = ______

- El cuadrado de 0.4, ¿es mayor o menor que 0.4?
- La raíz cuadrada positiva de 0.81, ¿es mayor o menor que 0.81?
- ¿Qué sucede con la raíz cuadrada positiva de un número menor que la unidad?
- ¿Qué sucede al elevar al cuadrado un número menor a la unidad?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. ¿Qué criterio siguieron para determinarlo? Compartan sus conclusiones sobre el resultado de elevar al cuadrado o calcular la raíz cuadrada de un número menor que la unidad.

### Practico

1. Sin hacer operaciones, determina los casos en los que el cuadrado de cada número es menor que éste.

a. $1.1^2$ = ______ b. $0.5^2$ = ______ c. $2.5^2$ = ______ d. $0.2^2$ = ______

2. Calcula mentalmente las dos raíces cuadradas de los siguientes números.

a. $\sqrt{121}$ = ______ b. $\sqrt{225}$ = ________ c. $\sqrt{0.25}$ = ______ d. $\sqrt{6.25}$ = ______

3. Aproxima a dos cifras decimales la raíz cuadrada positiva de los siguientes números.

a. $\sqrt{316}$ b. $\sqrt{90}$ c. $\sqrt{188}$ d. $\sqrt{275}$

4. En un parque de forma cuadrada con un área de 900 $m^2$ hay un camino que cruza el parque por su diagonal. ¿Cuál es la longitud del camino?

**Utilizo las TIC**

Para practicar lo que aprendiste en esta lección, ingresa a cmed.mx/m232 y elige en el menú: "Sencillo", "Potencias" y "raíces". Resuelve los ejercicios que se muestran y confirma si acertaste o no; corrige los errores.

L12

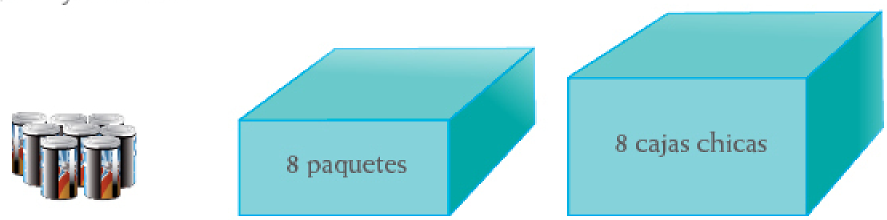
# Producto de potencias y potencias de potencias

La potenciación se conoce desde hace muchos siglos. Por ejemplo, los babilonios utilizaban la elevación a potencias como auxiliar de la multiplicación. Los griegos, por su parte, tenían predilección por los cuadrados y los cubos. Durante el siglo III de nuestra era, Diofanto inventó la notación $x$, $xx$, $xxx$ para expresar la primera, la segunda y la tercera potencias de $x$, y fue en el siglo XVII que Descartes introdujo la notación que actualmente conocemos: $x$, $x^2$, $x^3$, …

Exploro

**Resuelvo problemas que incluyen potencias.**

1. En la lección anterior resolviste un problema relacionado con el número de latas de jugo que se empacaban y transportaban en una fábrica. Considera la siguiente situación y resuelve.




1 paquete — 1 caja chica — 1 caja grande

Escribe como una multiplicación el número de latas que contiene la caja grande:

Ahora, anota la multiplicación anterior como potencia:

- ¿Cuántas latas de jugo hay en cada caja grande?

2. Para transportar y entregar las latas de jugo se usaron ocho camionetas y en cada una se transportaron ocho cajas grandes.
   - ¿Qué multiplicación permite calcular el número de cajas grandes que llevaron las ocho camionetas?
   - ¿Qué expresión como potencia le corresponde?
   - ¿Cuántas latas de jugo transportaron las ocho camionetas?

Describe el procedimiento que seguiste para determinarlo.

Escribe, en forma de potencia, el número de latas que transportaron las ocho camionetas. ____________________

Considerando las respuestas a las actividades 1 y 2, ¿cómo representarías el total de latas como producto de dos factores? Explica tu respuesta.

Comparen, en equipos, la respuesta a la última pregunta. ¿Cuál sería el resultado expresado como potencia? Comenten lo anterior y, con el apoyo del maestro, registren sus acuerdos.

**Leo +**

Existe una leyenda sobre el origen del juego del ajedrez que está relacionada directamente con el uso de potencias. Ingresa a: cmed.mx/m233; disfruta su lectura y comparte lo que aprendiste.

Descubro y construyo

## I. Calculo potencias con exponente uno y cero.

1. Analiza, en pareja, la siguiente tabla y complétenla. Después, respondan:

| Exponente | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| Potencia | $2^6$ | | | | |
| Número | 64 | | | | |

- ¿Qué regularidad siguen los exponentes?
- ¿Qué regularidad observan en los números que se generaron?
- De acuerdo con la regularidad, ¿cuáles serían los dos siguientes exponentes de la sucesión?
- Según la regularidad, ¿cuáles serían los dos siguientes números de la sucesión? Expliquen su respuesta. ______________________________________________

______________________________________________

2. Completen la siguiente tabla de potencias, cuya base es el 3.

| Exponente | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| Potencia | $3^6$ | | | | |
| Número | 729 | | | | |

- ¿Cómo pueden obtener cada número a partir del anterior? ________________
- Según la regularidad, ¿cuáles serían los dos siguientes números de la sucesión? Expliquen su respuesta. ______________________________________________
- ¿Cómo los representarían como potencias?
- ¿A qué número es igual $4^3$?
- ¿Qué tendrían que hacer con el número anterior para obtener el número que corresponde a $4^2$? Justifiquen su respuesta. ______________________________

______________________________________________
- Considerando lo anterior y los resultados de la tabla, ¿qué número es igual a $4^1$? Expliquen su respuesta. ______________________________________________
- De acuerdo con lo anterior, ¿podrían establecer una regla para calcular el valor de un número con exponente 1?
- ¿Y para números distintos de cero, con exponente cero?
- Si $a$ es un número distinto de cero, ¿cuánto es $a^1$ y $a^0$?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas y comenten sobre el valor de números con exponente uno y cero. Debatan con argumentos sobre las razones que les permitieron acordar que todo número elevado a la potencia cero es 1. Registren sus acuerdos para validarlos más adelante.

### Tomo Nota

Al elevar un número a la potencia 1, el resultado es igual a: ______________ número, es decir, $4^1$= _____. Por convención se estableció que todo número elevado a la potencia cero es igual a ____, es decir, $5^0$ = _____. En la siguiente lección entenderás por qué se llegó a dicha convención.

## II. Resuelvo multiplicaciones de potencias de la misma base.

1. Considera, en equipo, las potencias de las tablas de la página anterior y respondan.

   - ¿Cuál es el resultado de la multiplicación $16 \times 2$?
   - ¿Qué potencia de base 2 representa el resultado anterior?

   Escriban la multiplicación como una operación de potencias. ________________

   Resuelvan la siguiente multiplicación: $27 \times 9 =$ ______

   Representen la multiplicación como potencias de base 3: ______

   Representen la multiplicación anterior como una multiplicación iterada de factores iguales: _______________________

   - ¿Qué potencia de base 3 corresponde al resultado anterior?
   - ¿Cuál es el resultado de: $(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2)$?

   Escriban, como potencias de base 2, la multiplicación anterior: ______________

   Describan la relación entre los exponentes de los factores y el exponente del resultado en cada caso. ________________________________________________

   ___________________________________________________________________

   - ¿Cuál es el resultado, en potencias, de la multiplicación $2^1 \times 2^5$? Expliquen cómo lo obtuvieron. ____________________________________________________

2. Retomen el problema inicial del *Exploro*, consideren las respuestas de las actividades 1 y 2 y completen las siguientes operaciones.

| | Número de latas en cada caja grande | × | Número de cajas en las 8 camionetas | = | Total de latas |
|---|---|---|---|---|---|
| Con factores iguales | | × | | = | |
| Con números | | × | | = | |
| Como potencia | | × | | = | |

   - ¿Qué relación observan entre los exponentes de los factores y el exponente del resultado?
   - ¿Coincide la relación con la que observaron en los exponentes de la actividad 1 de esta página? Expliquen. __________________________________________

   ___________________________________________________________________

   ___________________________________________________________________

3. Discutan, con otros equipos, la relación que hay entre los exponentes de los factores y el exponente del resultado y describan un procedimiento para multiplicar potencias de la misma base. ______________________________________________

___________________________________________________________________

___________________________________________________________________

4. Escriban las siguientes potencias como multiplicaciones del mismo factor y resuelvan. Al final, escriban el resultado como una sola potencia que tenga la misma base.

| Multiplicación de potencias | Multiplicación de factores iguales | Multiplicación de dos factores | Resultado como potencia |
|---|---|---|---|
| $4^1 \times 4^6$ | $(4) \times (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4)$ | | |
| $6^3 \times 6^5$ | | | |
| $9^2 \times 9^4$ | | | |
| $11^3 \times 11^2$ | | | |
| $2^6 \times 2^4$ | | | |

5. Representen lo siguiente como multiplicaciones de potencias de la misma base y escriban el resultado como una sola potencia.

a. $(5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) =$ ____ × ____ = _______

b. $(7) \times (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7) =$ ____ × ____ = _______

c. $(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (1) =$ ____ × ____ = _______

d. $(8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8) =$ ____ × ____ = _______

e. $(10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) =$ ____ × ____ = _______

- ¿Qué procedimiento siguieron para resolver las operaciones? ___________
________________________________________________

6. Resuelvan.

- ¿Cuál es el resultado de la multiplicación $a^2 \times a^4$? __________
- ¿Qué potencia representa el resultado de: $(m \times m \times m) \times (m \times m)$? ____________
  Representen, como una multiplicación de dos potencias, $n^7$: ________________
  Representen el resultado de $4^n \times 4^m$ con una sola potencia. Justifiquen su respuesta. ________________________________

Validen sus resultados con el grupo y comparen sus procedimientos para multiplicar potencias de la misma base. Lleguen a acuerdos y regístrenlos.

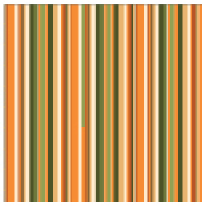
### Tomo Nota

Al multiplicar potencias de la misma base se suman los ____________ y se deja la ___________ base:
$a^n \times a^m = a^{m+n}$.
Por ejemplo,
$8^4 \times 8^3 = 8^{4+3} =$ _____.

## III. Calculo potencias de potencias de la misma base.

1. Observa los siguientes cuadrados. La medida que se muestra en cada caso corresponde a la medida de sus lados.

8



Cuadrado 1

$2^3$

Cuadrado 2

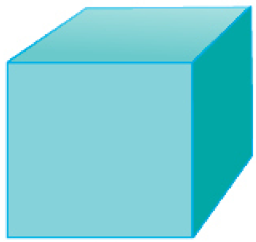
- ¿Cuál es el área de cada cuadrado representado como la multiplicación $L \times L$?
  Cuadrado 1: ______________ Cuadrado 2: ______________
- ¿Qué expresión representa el área como potencia? ____ Expliquen su respuesta en cada caso.
  Cuadrado 1: ______________ Cuadrado 2: ______________

El área del cuadrado 2 se puede representar como $(2 \times 2 \times 2)^2$. Explica por qué esto es correcto. ________________________________________________

- ¿Qué multiplicación de factores iguales corresponde a la potencia anterior?
- ¿Cuál es el área de cada cuadrado?
- ¿Qué potencia de base 2 representa el área del cuadrado 2?

2. Consideren, en parejas, el siguiente cubo y resuelvan.
   - El volumen del cubo puede presentarse como $(4^2)^3$. ¿Por qué?
   - ¿Qué multiplicación representa la expresión anterior?

   Representen la medida de cada arista como una multiplicación: ________________________________________
   ________________________________________________



$4^2$

Ahora, escriban el volumen como una multiplicación; consideren la operación anterior como factores: ____________________________

- ¿Cuál es el volumen del cubo expresado como potencia de base 4? ____________
- ¿Qué relación observan entre el exponente anterior y los exponentes de la expresión $(4^2)^3$?

Comparen sus porcedimientos y respuestas con los realizados por otras parejas. Los casos anteriores representan una potencia de potencias. ¿Qué relación hay entre los exponentes? Comenten por qué se da esta relación y cómo se puede representar y resolver. Registren sus conclusiones.

3. Considera, en forma individual, las siguientes potencias y resuelve. Escribe el resultado como una potencia con un solo exponente. Observa el ejemplo.

a. $(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4 = (3 \times 3 \times 3 \times 3)\ (3 \times 3 \times 3 \times 3) =$ ______

b. $(9^3)^3 =$ ______

c. $(5^2)^5 =$ ______

d. $(12^2)^3 =$ ______

- ¿Qué relación observas entre los exponentes de la expresión $(3^4)^2$ y el exponente del resultado?
- ¿Cómo puedes obtener el exponente del resultado a partir de los exponentes de la potencia de una potencia?
- ¿Cuál es el resultado de $(a^2)^4$?

Compara tus respuetas con las de otros integrantes del grupo. Si no coinciden, revisen dónde está el error y corrijan. En equipo, definan una regla para resolver una potencia de otra potencia.

## Practico

1. Escribe el resultado de cada multiplicación como una sola potencia.

a. $2^6 \times 2^5 =$ ______ b. $6^0 \times 6^7 =$ ______ c. $18^9 \times 18^1 =$ ______ d. $4^5 \times 4^7 =$ ______

2. Escribe las siguientes potencias como una multiplicación de potencias de la misma base.

a. $7^9 =$ ______ b. $15^2 =$ ______ c. $21^6 =$ ______ d. $4^9 =$ ______

3. Escribe las siguientes potencias como una multiplicación de potencias de la misma base.

a. $(17^5)^3 =$ ______ b. $(24^7)^1 =$ ______ c. $(8^6)^4 =$ ______ d. $(32^7)^0 =$ ______

4. Escribe las siguientes multiplicaciones como una potencia de potencias. Después, exprésalas como una sola potencia.

a. $(3 \times 3)\ (3 \times 3)\ (3 \times 3)\ (3 \times 3)\ (3 \times 3)\ (3 \times 3) =$ ______

b. $(6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6)\ (6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6)\ (6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6) =$ ______

c. $(9)(9)(9)(9)(9)(9)(9)(9)(9) =$ ______

**Utilizo las TIC**

Utiliza tu calculadora y resuelve potencias de potencias en diferentes formas, siguiendo el ejemplo de la actividad 3 de esta página; valida que en todos los casos se obtenga el mismo resultado.

Ingresa al sitio: cmed.mx/m234 y resuelve los ejercicios sobre potencias de una potencia que ahí se ofrecen.

### Tomo Nota

La potencia de una potencia es igual al producto de los ______:
$(b^x)^y =$ ______.

Por ejemplo,
$(8^4)^3 = 8^{4\times3} =$ ______.

L13

# Cocientes de potencias y exponentes negativos

En las lecciones previas trabajaste con potencias, multiplicaciones de potencias y potencias de una potencia. En esta lección identificarás la regla para dividir potencias.

**Exploro**

## Resuelvo problemas que incluyen potencias.

1. Retoma la situación de la fábrica de jugos y considera la siguiente situación. Una camioneta de carga transporta, para su entrega en diferentes lugares, un total de $4^3$ cajas de jugo, y cada una contiene $4^3$ latas.


- ¿Cuántas latas transporta la camioneta?
- ¿Cuántas latas contiene cada caja?
- ¿Qué operación permite conocer el número de cajas que transporta la camioneta?

________________________________________________

________________________________________________

- ¿Cuántas cajas transporta la camioneta?

Escribe el número de cajas como una potencia de base 4: ________________

2. Ahora, supón que una camioneta transporta un total de $2^9$ latas de jugo en cajas que contienen $2^4$ latas.
   - ¿Cuántas cajas transporta la camioneta? Explica el procedimiento que seguiste para determinarlo. ________________________________________

   ________________________________________________

   Escribe la cantidad de cajas transportadas como una potencia de base 2: ________

   Escribe los números que dividiste, y el resultado de la división, como potencias en las que la base sea 2. ________________________________________

   A partir de estos problemas, establece una regla para dividir potencias de la misma base.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Discutan sobre su respuesta a la última pregunta, en busca de llegar a acuerdos. Después, compártanlos con el grupo. Los validarán durante la lección.

Descubro y construyo

**I. Resuelvo divisiones de potencias y establezco una regla para resolver este tipo de operaciones.**

Trabajen en parejas para responder lo siguiente:

1. Simplifiquen a su mínima expresión las siguientes fracciones y resuelvan las divisiones. Recuerden que todo número entero puede representarse como una fracción con denominador 1.

a. $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} =$ _______ b. $\frac{16}{4} = \frac{\quad}{\quad} = 4$

c. $\frac{2}{10} = \frac{\quad}{\quad} =$ _______ d. $\frac{12}{2} = \frac{\quad}{\quad} =$ _______

2. Considerando lo anterior, analicen la siguiente información y resuelvan.
La maestra pidió a sus alumnos resolver la división de potencias.
Para resolver la operación, dos estudiantes realizaron los siguientes procedimientos:

Vicente: $\frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{\cancel{3} \times \cancel{3}} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{1} = \frac{81}{1} = \frac{3^4}{1}$

Paola: $\frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{\cancel{3} \times \cancel{3}} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{0} = \frac{81}{0} = \frac{3^4}{0}$

- ¿Qué hicieron ambos estudiantes al tachar los números?
- ¿Quién cometió el error y en qué consiste?
- ¿Cuál es el resultado de la división $\frac{3^6}{3^2}$ como potencia de base 3?

3. Escriban el numerador y el denominador como productos del mismo factor; simplifiquen y escriban el resultado como una potencia de la misma base.

a. $\frac{4^7}{4^5} = \frac{\cancel{4} \times \cancel{4} \times \cancel{4} \times \cancel{4} \times \cancel{4} \times 4 \times 4}{\cancel{4} \times \cancel{4} \times \cancel{4} \times \cancel{4} \times \cancel{4}} = \frac{4 \times 4}{1} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{4^2}{\quad} =$

b. $\frac{5^8}{5^4} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} =$

c. $\frac{2^7}{2^2} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} =$

d. $\frac{8^6}{8^5} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} =$

- ¿Qué regularidad observan en las divisiones de potencias? ¿Qué relación existe entre el exponente del numerador, el exponente del denominador y el exponente que se necesita para expresar el resultado de la división como una potencia con la misma base?

4. Completen la siguiente tabla. Después, escriban las potencias como números enteros y resuelvan las divisiones. Finalmente, escriban el resultado como potencia de base 2.

| Potencia | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^9$ | $2^{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número | 1 | | | | | | | | | | |

a. $\frac{2^8}{2^3} = \frac{256}{8} =$ _______ = _______

b. $\frac{2^{10}}{2^3} = \frac{\quad}{\quad} =$ _______ = _______

c. $\frac{2^7}{2^6} = \frac{\quad}{\quad} =$ _______ = _______

d. $\frac{2^9}{2^1} = \frac{\quad}{\quad} =$ _______ = _______

e. $\frac{2^6}{2^1} = \frac{\quad}{\quad} =$ _______ = _______

f. $\frac{2^8}{2^5} = \frac{\quad}{\quad} =$ _______ = _______

- ¿Qué sucede si en el inciso **a** resuelven: exponente del numerador menos exponente del denominador?

- ¿La relación anterior se repite en todas las divisiones?

A partir de lo anterior, anoten una regla para dividir potencias de la misma base.

_______________________________________________

5. Resuelvan las siguientes divisiones de potencias.

a. $\frac{7^5}{7^3} = \frac{(\ ) - (\ )}{\quad} = 7^2$

b. $\frac{9^8}{9^3} =$ _______ = _______

c. $\frac{4^n}{4^m} =$ _______

d. $\frac{a^7}{a^5} =$ _______ = _______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y debatan, con argumentos, su regla para dividir potencias de la misma base. Registren sus acuerdos con el apoyo del maestro.

**Practico**

1. Si en una caja hay $3^6$ dulces en bolsas que contienen $3^2$ dulces, ¿cuántas bolsas hay en total? ____________________

2. ¿Cuál es el resultado de dividir $8^6$ entre $8^4$? ____________________

3. Completa las siguientes operaciones.

a. $\frac{n^{10}}{n^7} =$ _____

b. $\frac{m^{(\ )}}{m^5} = m^1$

c. $\frac{12^{10}}{12^{(\ )}} = 12^7$

d. $\frac{b^s}{b^r} =$ _____

## Tomo Nota

Al dividir potencias de la misma base, se ______________ al exponente del __________ el exponente del ______________; el resultado es igual al exponente del __________________, como una potencia con la misma __________.

**II. Identifico la convención para potencias con exponente cero por medio de la división de potencias.**

1. Resuelve las siguientes divisiones:

a. $\frac{8}{8}$ = ______  b. $\frac{16}{16}$ = ______  c. $\frac{25}{25}$ = ______  d. $\frac{n}{n}$ = ______

2. Escribe cada potencia como producto de factores iguales y resuelve las divisiones.

a. $\frac{5^4}{5^4} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$ = ____  b. $\frac{4^3}{4^3}$ = __________ = ____

c. $\frac{12^5}{12^5}$ = ____________________ = ____  d. $\frac{m^6}{m^6}$ = ____________________ = ____

3. Ahora, resuelve las divisiones por medio de potencias.

a. $\frac{5^8}{5^8} = 5^{(\ )-(\ )} = \square$  b. $\frac{4^3}{4^3} = \square = \square$  c. $\frac{n^9}{n^9} = \square = \square$

d. $\frac{14^3}{14^3} = 14^{(\ )-(\ )} = 14^{(\ )}$  e. $\frac{28^9}{28^9} = \square = \square$  f. $\frac{x^{12}}{x^{12}} = \square = \square$

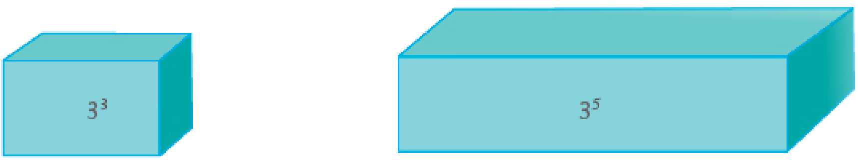
- ¿Cuál es el resultado de dividir un número distinto de cero entre sí mismo?

- ¿Cuál es el resultado de una potencia con exponente cero?

Describe por qué se da la convención: "Todo número elevado a la potencia cero es igual a 1", a partir de una división de potencias.

**III. Resuelvo divisiones de potencias cuyo cociente tiene exponente negativo.**

1. Observen, en parejas, las siguientes cajas y resuelvan. La caja chica contiene $3^3$ cubos, mientras que en la caja grande caben $3^5$ cubos del mismo tamaño.




- ¿Cuántas veces cabe el contenido de la caja chica en la caja grande?

- ¿Cómo lo determinaron?

- ¿Qué parte de la caja grande representan los cubos de la caja chica?

- ¿Cómo lo determinaron?

- ¿Cómo representarían el resultado por medio de potencias de base 3? Justifiquen su respuesta. ____________________________________________

2. Analiza la división $\frac{2^3}{2^6}$ y resuelve.

- De acuerdo con la regla de la división de potencias, ¿cuál es el resultado de la división?
- ¿Qué división numérica corresponde a la operación anterior?
- ¿Cuál es el resultado de la división numérica? Escribe el resultado como fracción simplificada.

Escribe la fracción con denominador como potencia de base 2:

- ¿Qué relación hay entre el exponente anterior y el exponente de la división de potencias?

Ahora, resuelvan las divisiones por medio de la diferencia de los exponentes.

a. $4^2 \div 4^5 = 4^{2-5} =$ ______
b. $15^1 \div 15^6 =$ ___________
c. $8^6 \div 8^7 =$ ___________
d. $11^3 \div 11^{10} = 11^{3-10} =$ ______
e. $16^4 \div 16^9 =$ ______
f. $p^8 \div p^{12} = p^{8-12} =$ ______

- ¿Qué características tiene el exponente del cociente cuando el exponente del numerador (dividendo) es menor que el exponente del divisor (denominador)?

3. Resuelvan las siguientes divisiones. Observen el ejemplo.

| División de potencias | División de factores iguales | División simplificada | Como potencias |
|---|---|---|---|
| $4^2 \div 4^5$ | $\frac{4 \times 4}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}$ | $\frac{1}{4 \times 4 \times 4}$ | $\frac{1}{\quad}$ |
| $15^1 \div 15^6$ | | | |
| $8^6 \div 8^7$ | | | |
| $7^3 \div 7^6$ | | | |
| $s^6 \div s^9$ | | | |
| $p^6 \div p^9$ | | | |

**Utilizo las TIC**

Ingresa a la página: cmed.mx/m235 y resuelve los ejercicios para practicar la división de potencias.

- ¿Por qué la fracción de los cocientes tiene numerador 1?
- ¿Cómo puede representarse una potencia con exponente negativo como potencia con exponente positivo?
- ¿Qué potencia con exponente positivo es igual a $5^{-6}$?
- De lo anterior podemos generalizar que $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. ¿Están de acuerdo con la afirmación? Argumenten su postura con un ejemplo.

Validen sus resultados con otros compañeros. Discutan, con el apoyo del maestro, por qué $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Busquen llegar a acuerdos y regístrenlos en su cuaderno.

**IV. Justifico la relación entre una potencia con exponente negativo y una fracción con exponente positivo.**

1. Completa la siguiente tabla considerando el mismo patrón de la lección anterior, pero ahora hasta $2^{-4}$; escribe los números como fracción.

| Potencia | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | $2^{-1}$ | $2^{-2}$ | $2^{-3}$ | $2^{-4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | | | | |
| Número decimal | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | | | | |

- ¿Cómo se obtiene $2^5$, como número, a partir de $2^6$, es decir, cómo se obtiene 32 a partir de 64? ______________________
- ¿Cómo se obtiene cada número a partir del anterior? ______________________
- ¿Cómo se obtiene cada número a partir del anterior, usando el **recíproco** de 2? ______________________

Trabajen en parejas.

2. Completen la siguiente tabla, siguiendo el ejemplo.

| Potencia negativa | $2^{-1}$ | $2^{-2}$ | $2^{-3}$ | $2^{-4}$ |
|---|---|---|---|---|
| Multiplicación iterada | $1 \times \frac{1}{2} =$ | $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$ | $1 \times$ | $1 \times$ |
| Fracción con denominador como potencia positiva | $\frac{1}{\_\_} =$ | | | |

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. A partir de lo anterior, registren sus conclusiones sobre la relación entre una potencia con exponente negativo y una equivalente como fracción cuyo denominador es una potencia con exponente positivo.

## Practico

1. Resuelve las divisiones. Escribe el resultado como potencia negativa y como fracción con el denominador como potencia positiva de la misma base.

a. $\frac{13^{18}}{13^{23}} =$ __________ b. $\frac{22^5}{22^9} =$ __________ c. $\frac{z^{26}}{z^{33}} =$ __________

d. $8^6 \div 8^7 =$ __________ e. $\frac{m \times m \times m \times m \times m}{m \times m \times m \times m \times m \times m \times m} =$ __________

2. Completa las multiplicaciones iteradas y escribe la fracción correspondiente como potencia positiva.

a. $3^{-3} = 1 \times$ ______________ b. $7^{-5} = 1 \times$ ______________

c. $4^{-4} = 1 \times$ ______________ d. $9^{-2} = 1 \times$ ______________

## GLOSARIO

**Recíprocos.** También llamados inversos multiplicativos, son números que al multiplicarse entre sí dan 1. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ y 2 son recíprocos porque $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Esto significa que multiplicar por $\frac{1}{2}$ es lo mismo que dividir entre 2 o viceversa.

## Tomo Nota

Si $a$ es un número distinto de 0, entonces $\frac{1}{a}$ representa el recíproco de $a$. Debido a lo anterior, una potencia negativa es igual al recíproco de la base elevado al opuesto del exponente. Es decir, el recíproco de un número $a$ es $a^{-1} =$ ____ $= \frac{1}{a}$. De ahí se puede generalizar que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Lo anterior demuestra que toda potencia con base $a$ y exponente negativo ($-n$) se puede representar como una potencia con base $\frac{1}{a}$ y exponente positivo $n$.

## Utilizo las TIC

Con tu calculadora, resuelve las potencias negativas del Practico en dos formas diferentes. Por ejemplo, para $4^{-4}$ oprime las teclas:

[4] [xy] [4] [±] [=] [y]

para $\frac{1}{a^4}$:

[1] [÷] [4] [xy] [4] [=] [y]

valida que, en ambos casos, obtienes el mismo resultado.

L14

# Potencias de base 10

¿Alguna vez has reflexionado sobre la curiosidad? ¿Consideras que la curiosidad es un motor importante para conocer el mundo que nos rodea? ¿Te asombras cuando encuentras respuestas a tus preguntas? Grandes pensadores, mujeres y hombres, han dedicado mucho tiempo y esfuerzo por entender el mundo e inventar instrumentos como es el caso del telescopio, para observar el Universo, lo lejano; y el microscopio, para ver lo ínfimo, el interior. Estos inventos han impactado poderosamente en la ciencia y la medicina.

Exploro

## Resuelvo problemas relacionados con cantidades muy grandes y muy pequeñas.

1. Completa la siguiente tabla, que muestra la distancia de algunos planetas respecto al Sol.

| Planeta | Distancia al Sol en millones de km | Distancia al Sol en km |
|---|---|---|
| Mercurio | 57.91 | |
| Venus | 108.20 | |
| Tierra | 146.60 | |
| Marte | 227.94 | 227 940 000 |

- Si en algún momento los planetas que se muestran estuvieran alineados, ¿cuál sería la distancia, en millones de kilómetros, entre el planeta más cercano y el más lejano al Sol?
- ¿Cómo se representa la distancia anterior en kilómetros?
- ¿Por qué número se multiplican las distancias indicadas en millones de kilómetros para obtener las distancias en kilómetros?
- Si la distancia de Júpiter al Sol es de 778 millones de kilómetros, ¿qué operación permite obtener la distancia en kilómetros?

2. Completa la siguiente tabla, que muestra el tamaño de diferentes microorganismos.

| Microorganismos | Medida en **micrómetros** (μm) | Medida en milímetros |
|---|---|---|
| Microbio | 0.04 | |
| Bacteria | | 0.000002 |
| Glóbulo rojo | 0.0075 | 0.0000075 |

- ¿Qué operación permite representar 4 mm en μm?
- ¿Qué operación permite representar 3 μm en mm?
- Aplicando el recíproco de 1000, ¿qué multiplicación permite obtener el resultado anterior?

Compara tus respuestas con las de otro integrante del grupo. Discutan sobre cómo podrían representar la multiplicación de la última pregunta de cada actividad, usando potencias de base 10.

**Leo +**

Ingresa a: cmed.mx/m236, donde encontrarás información sobre el origen del telescopio y el microscopio.

**GLOSARIO**

**Micrómetro.** Unidad de medida de longitud.
1 μm = 0.001 mm o
1 mm = 1 000 μm.

Descubro y construyo

**I. Resuelvo multiplicaciones que incluyen potencias de 10.**

1. Resuelvan, en parejas, las siguientes multiplicaciones.

a. $7.8 \times 10\,000 =$ ____________ b. $9.21 \times 1\,000\,000 =$ ____________

c. $1.53 \times 100\,000 =$ ____________ d. $4.127 \times 10\,000\,000 =$ ____________

e. $5.6 \times \frac{1}{10\,000} = \frac{5.6}{10\,000} =$ ____________ f. $3.31 \times \frac{1}{1\,000} = \frac{\quad}{\quad} =$ ____________

g. $2.1 \times 0.00001 =$ ____________ h. $7.49 \times 0.000001 =$ ____________

- ¿Qué procedimiento siguieron para resolver las operaciones del inciso **a** al **d**?

Describan la estrategia que siguieron para resolver las multiplicaciones del inciso **e** al **h**.

2. Escriban el número que corresponde a las siguientes potencias positivas de 10.

a. $10^0 =$ ______ b. $10^5 =$ ______ c. $10^6 =$ ______ d. $10^3 =$ ______
e. $10^2 =$ ______ f. $10^4 =$ ______ g. $10^7 =$ ______ h. $10^1 =$ ______

- ¿Qué representa el exponente en cada caso?

3. Escriban las siguientes potencias negativas como fracción con numerador 1 y como número decimal. Recuerda que $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

a. $10^{-2} = \frac{1}{100} =$ ______ b. $10^{-5} = \frac{\quad}{\quad} =$ ______ c. $10^{-1} = \frac{\quad}{\quad} =$ ______

d. $10^{-3} = \frac{\quad}{\quad} =$ ______ e. $10^{-4} = \frac{\quad}{\quad} =$ ______ f. $10^{-6} = \frac{\quad}{\quad} =$ ______

- En la expresión decimal de estos números, ¿qué relación existe entre el **valor absoluto** del exponente negativo de cada una de estas potencias con la cantidad de ceros y la posición del punto?

4. Resuelvan las siguientes multiplicaciones de números decimales por potencias de 10.

a. $3.221 \times 10^5 =$ ______ b. $1.98 \times 10^7 =$ ______ c. $9.7 \times 10^2 =$ ______

d. $6.7 \times 10^{-4} =$ ______ e. $2.03 \times 10^{-6} =$ ______ f. $8.4 \times 10^{-3} =$ ______

Comenten con otras parejas la estrategia que siguieron para resolver las operaciones. ¿Cómo pueden representar un número como una multiplicación que incluya una potencia de base 10, ya sea positiva o negativa? Debatan sobre la pregunta anterior otras parejas y, con el apoyo del maestro, registren sus acuerdos.

**GLOSARIO**

**Valor absoluto.** Distancia que hay de un número al cero.

### Tomo Nota

La forma general de representar un número $a$ en notación científica es $a \times 10^n$, donde $a$ es igual o mayor que 1 y menor que 10 ($1 \leq a < 10$), y $n$ es un número entero.

## II. Represento cantidades muy grandes en notación científica.

Operaciones como las que resolviste en la última actividad de la página anterior se conocen como notación científica; representan multiplicaciones de una potencia de base 10 (con exponente positivo o negativo) por un número decimal, con una cifra antes del punto decimal. Esta notación permite representar, de manera abreviada, números muy grandes o muy pequeños.

1. Lean en equipo la información y resuelvan.

En la actividad inicial escribieron la distancia aproximada de algunos planetas del Sistema Solar al Sol. Como se indicó, la distancia de Júpiter al Sol es de aproximadamente 778 000 000 km.

- Consideren la cantidad anterior y muevan el punto decimal a la izquierda hasta obtener un número entre 1 y 10. ¿De qué número se trata?
- ¿Por qué número tendrían que multiplicar el número anterior para obtener la distancia de este planeta al Sol?
- ¿Cómo se representa el número anterior como potencia de base 10?

Representen la distancia de Júpiter al Sol en notación científica. ___________

2. Sigan la estrategia anterior y completen la siguiente tabla, que muestra la distancia aproximada de otros planetas al Sol. Después, resuelvan.

| Planeta | Distancia al Sol (km) | En notación científica |
|---|---|---|
| Saturno | 1 430 000 000 | km |
| Urano | 2 871 000 000 | km |
| Neptuno | 4 504 000 000 | km |

- Si la masa de la Tierra es de unos 5 972 000 000 000 000 000 000 000 kg, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la misma cantidad en notación científica?
  $5.972 \times 10^{24}$ kg  $59.72 \times 10^{22}$ kg  $5.972 \times 10^{26}$ kg
- La masa de Mercurio es igual a 330 300 000 000 000 000 000 000 kg. Un estudiante la representó en notación científica como $330.3 \times 10^{21}$ kg. ¿Por qué esta expresión no es correcta?
- ¿Cuál es la forma correcta de representar la masa de Mercurio en notación científica?
- Si la masa de la Luna es de $7.34 \times 10^{22}$ kg, ¿cómo se escribe esa cantidad en notación decimal?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Si existen diferencias, validen sus procedimientos con el maestro en busca de error y, de ser necesario, corrijan.

### Utilizo las TIC

La calculadora científica tiene la tecla 10ˣ para operar en notación científica. Oprime las teclas:
6 10ˣ × 3.2 =
y luego:
8 ± 10ˣ × 4.76 =.

Si en la pantalla aparecen expresiones como 3.2E25, es porque el número no cabe en la pantalla y muestra el resultado en notación científica, que en este caso es equivalente a: $3.2 \times 10^{25}$.

## III. Represento cantidades muy pequeñas en notación científica.

En la tabla de la actividad inicial se indicó que el tamaño de un microbio es de 0.00004 mm, el de una bacteria es de 0.0000002 mm y el de un glóbulo rojo es de 0.0000075 mm.

1. Resuelvan, en parejas, a partir de la información anterior.
   - Considerando la medida del microbio, si se mueve el punto decimal a la derecha hasta obtener un número entre 1 y 10, ¿qué número se obtiene?
   - ¿Cuántas cifras se movió el punto a la derecha?
   - ¿Qué división permite regresar del número que obtuvieron a 0.00004?

Como saben, dividir un número $a$ por un número $b$ distinto de cero $(\frac{a}{b})$ es igual a multiplicar al número $a$ por el recíproco $b$, es decir, $\frac{a}{b} = a \times (\frac{1}{b})$.

- De acuerdo con lo anterior, ¿qué multiplicación permite obtener el resultado de la división?

Escriban la fracción anterior como una potencia negativa de base 10.

- ¿Cómo se representa la medida del microbio en notación científica?

2. Escriban en notación científica la longitud de una bacteria y de un glóbulo rojo.
   a. Bacteria: ___________ mm    b. Glóbulo rojo: ___________ mm

3. La masa de una bacteria es igual a 0.00000000000011 g aproximadamente. ¿Cómo se representa dicha masa en notación científica?
   - La masa de un glóbulo rojo es de $1 \times 10^{-10}$. ¿Cómo se representa en notación decimal?

Validen sus resultados con distintos compañeros. Comenten, las ventajas de usar la notación científica para representar números muy grandes o muy pequeños. Registren sus conclusiones.

### Practico

1. Subraya la representación decimal correcta de cada número dado en notación científica.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $8.765 \times 10^{6}$: | 87 650 000 | 8 765 000 | 876 500 000 |
| b. $2.005 \times 10^{8}$: | 200 500 000 | 20 500 000 | 2 000 500 000 |
| c. $6.9 \times 10^{-9}$: | 0.00000000069 | 0.00000069 | 0.0000000069 |
| d. $1.03 \times 10^{-11}$: | 0.0000000000103 | 0.000000000103 | 0.000000001003 |

2. Escribe las siguientes cantidades en notación científica.
   a. 31 400 000 000 = ______________    b. 120 000 000 = ______________
   c. 300 200 000 000 = ______________    d. 0.0000007 = ______________
   e. 0.000000000609 = ______________    f. 0.00000000000123 = ______________

### Tomo nota

Al dividir entre potencias de 10, se deja el mismo número y se recorre el punto decimal a
la izquierda tantos lugares como ceros tenga la potencia de 10, agregando los ceros que
sean necesarios; por ejemplo, 32 ÷ 100 = 0.32..

### Utilizo las TIC

Ingresa al sitio: cmed.mx/m237 y en el menú que aparece a la izquierda: "Notación científica", ingresa a todas las opciones para conocer más sobre notación científica, repasar lo que aprendiste y practicar.

## Recapitulo

1. Una potencia entera positiva es una manera abreviada de escribir una multiplicación. En la potencia $a^n$, $a$ es la base y $n$ el exponente, que indica las veces que $a$ se multiplica por sí misma.
2. La raíz cuadrada de un número es el número positivo que al elevarlo al cuadrado es igual al primero: como $2^2 = 4$, entonces raíz (4) = 2.
3. Al multiplicar dos potencias de la misma base se suman los exponentes $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

   Al dividir dos potencias de la misma base se restan los exponentes. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
4. Para obtener una potencia de una potencia, se multiplican los exponentes: $(a^n)^m = a^{n \times m}$.
5. Una potencia con exponente negativo es igual al recíproco de la potencia que tiene la misma base, elevada al opuesto del exponente, es decir: $a^{(-n)} = \frac{1}{a^n}$.
6. La notación científica es una forma abreviada de representar cantidades muy grandes o muy pequeñas, mediante multiplicaciones que incluyen potencias de base 10, por ejemplo: $a$ en notación científica es $a \times 10^n$, donde $a$ es igual o mayor que 1 y menor que 10 ($1 \leq a < 10$) y $n$ es un número entero.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Escribe como una potencia las siguientes multiplicaciones.

**a.** $16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 =$ ______ **b.** $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$ ______

**c.** $11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 =$ ______ **d.** $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$ ______

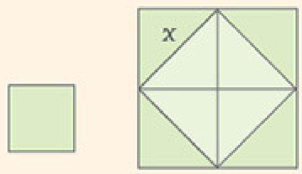
**2.** Subraya los números que representan un cuadrado perfecto.

196 355 441 256 512

**3.** ¿Cuál es la medida aproximada de x, es decir, cuál es la medida de los lados del cuadrado central?

$x =$ __________

8 cm




**4.** Completa las siguientes expresiones con números decimales de dos cifras que sean consecutivos.

_____ $< \sqrt{145} <$ _____ _____ $< \sqrt{200} <$ _____ _____ $< \sqrt{73} <$ _____

**5.** Resuelve las siguientes operaciones de potencias. En caso de que el resultado sea una potencia con exponente negativo, escríbela como fracción con numerador 1 y un denominador que sea una potencia de 10 con exponente positivo.

**a.** $2^6 \times 2^{-8} =$ _____ = _____ **b.** $8^3 \times 8^0 =$ _____ **c.** $27^{-3} \times 27^{11} =$ _____

**d.** $(12^{-4})^{-7} =$ _____ **e.** $(5^{-6})^2 =$ _____ **f.** $(13^0)^4 =$ _____

**g.** $\frac{9^7}{9^{-5}} =$ _____ **h.** $\frac{14^{-4}}{14^4} =$ _____ = _____ **i.** $\frac{6^7}{6^8} =$ _____ = _____

**6.** Subraya los números que están mal representados en notación científica.

**a.** $3\,090\,000\,000 = 3.09 \times 10^9$ **b.** $27\,000\,000\,000\,000 = 2.7 \times 10^{12}$

**c.** $410\,000\,000\,000 = 4.1 \times 10^{11}$ **d.** $60\,940\,000\,000\,000 = 6.094 \times 10^{13}$

**e.** $0.00000054 = 5.4 \times 10^{-7}$ **f.** $0.000000000801 = 8.01 \times 10^{-11}$

**g.** $0.000000095 = 9.5 \times 10^{-9}$ **h.** $0.00000000000000231 = 2.31 \times 10^{-15}$

# Logro ir **más allá**

El Sistema Solar está formado por el Sol y diversos cuerpos celestes que orbitan a su alrededor: planetas, asteroides y cometas, además de polvo y gas interestelar.

Pertenece a la llamada Vía Láctea, que es una galaxia en espiral cuyo **diámetro medio** se estima en $1.42 \times 10^{18}$ km y que posee una masa igual a $10^{12}$ veces la masa del Sol. El Sistema Solar está situado en uno de los tres brazos de la espiral de esta galaxia, llamada Orión, a unos 32 000 **años luz** del núcleo.

El Sol tiene un radio de 695 000 km y su masa es de $1.98 \times 10^{30}$ kg.

1. Responde a partir de la información anterior y considera que: $(1.5 \times 10^5) \times (2.1 \times 10^3) = 3.15 \times 10^8$ y que $(6 \times 10^{-6}) \div (4 \times 10^4) = 1.5 \times 10^{-10}$.
   - ¿Cuál es la masa de la Vía Láctea representada en notación científica? Explica tu respuesta.
   - ¿Cuánto mide el diámetro del Sol, representado en notación científica?

2. La masa de la Tierra mide $15.97 \times 10^{24}$ kg y su diámetro ecuatorial es de $1.276 \times 10^4$ km.
   - ¿Cuántas veces es mayor el diámetro del Sol que el de la Tierra, aproximadamente?
   - Si la masa de Venus es de $4.869 \times 10^{24}$ kg aproximadamente, ¿cuántas veces la masa de la Tierra es mayor que la masa de Venus? Justifica tu respuesta.

**GLOSARIO**

**Diámetro medio.** Es el valor promedio de los diámetros.

**Año luz.** Es la distancia que recorre la luz en un año. Si la velocidad de la luz es de 300 000 km/s, un año luz equivale, aproximadamente, a 9 461 000 000 000 km. Neptuno, el planeta más lejano del Sol, se encuentra a 0.0006225945297850989 años luz del Sol.

# Expresiones algebraicas equivalentes

L15

Como sabes y viste en tu curso de primer grado, una sucesión es un conjunto ordenado de números o figuras que siguen un patrón. A los elementos de una sucesión también se les llama términos. Una progresión aritmética es una sucesión en la que cada elemento se obtiene sumando al término anterior una cantidad fija llamada diferencia.

Exploro

## Identifico términos que pertenecen a una sucesión aritmética.

Lalo y su hijo Matías juegan a formar figuras con bloques de construcción. Lalo sabe que esta actividad ayuda a su pequeño a desarrollar habilidades y creatividad, además de que contribuye a la convivencia familiar y al disfrute.

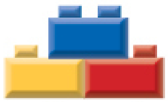


Figura 1

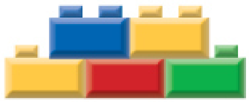


Figura 2

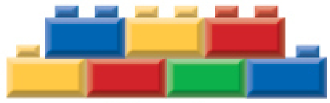


Figura 3

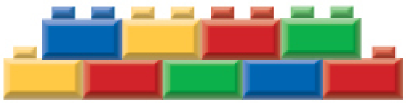


Figura 4

Figura 5

1. Analiza la sucesión generada con los bloques y responde.

   Describe el comportamiento de la sucesión.
   - Si continúan colocando bloques con el mismo patrón, ¿cuántos bloques tendrán las figuras 6 y 7? ¿Cómo lo determinaste?

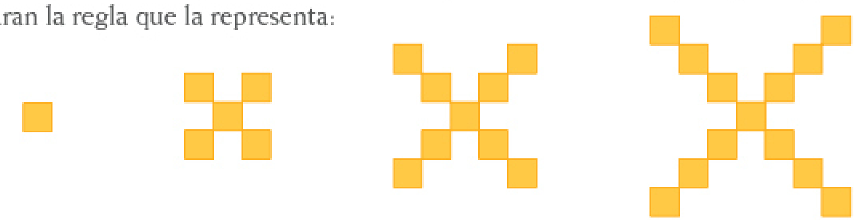
2. Si el número de bloques de cada figura continúa aumentando de la misma forma:

   - ¿Cuántos bloques tendrá la figura número 10?
   - ¿Cuántos tendrá la figura que va en el lugar 25?
   - ¿Y la figura que va en el lugar 52?
   - ¿Cómo determinaste el número de bloques en cada caso?
   - ¿Qué expresión algebraica permite obtener la figura *n* de la sucesión?

Compara tus respuestas con las de otro integrante del grupo. ¿Escribieron la misma expresión? ¿Habrá otra manera de representar algebraicamente la regla de la sucesión? Discutan lo anterior y, con el apoyo del maestro, registren sus acuerdos.

## I. Identifico diferentes expresiones algebraicas que representan la regla de una sucesión aritmética.

La maestra presentó la siguiente sucesión de figuras a sus alumnos y les pidió que determinaran la regla que la representa:



1. Observen, en parejas, la sucesión y completen la siguiente tabla.

| Figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Núm. de cuadrados | | | | | | | | | | |

Varios estudiantes expusieron sus reglas al grupo, de la siguiente manera:

* Edgar: Cada figura se obtiene al multiplicar por cuatro el número de término que le corresponde y restar 3 al resultado, es decir, $4n - 3$.
* Sofía: Cada figura se obtiene al sumar al primer término (1) la diferencia entre términos (4) y multiplicar esto por el término correspondiente menos 1, es decir, $1 + 4(n - 1)$.
* Luisa: Cada término se obtiene al multiplicar por 3 el número de término y restar 2 al resultado, es decir, $3n - 2$.

- ¿Quiénes plantearon la expresión algebraica que describe correctamente la sucesión?
- ¿Qué hicieron para determinarlo?

2. Utilicen las reglas que eligieron y determinen el número de cuadrados de las siguientes figuras. Escriban el procedimiento que corresponde a cada expresión elegida.

| | Procedimiento 1 | Procedimiento 2 |
|---|---|---|
| a. Figura 25: | __________________ | __________________ |
| b. Figura 38: | __________________ | __________________ |
| c. Figura 55: | __________________ | __________________ |

Escriban de una forma diferente la regla de la sucesión:

3. Analicen la siguiente sucesión de números y escriban los cinco términos que siguen. $3, 1, -1, -3, -5$, ____, ____, ____, ____, ____, . . .

- ¿Qué tienen que hacer con cada término para obtener el siguiente?
- ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas representan una regla que define la sucesión?

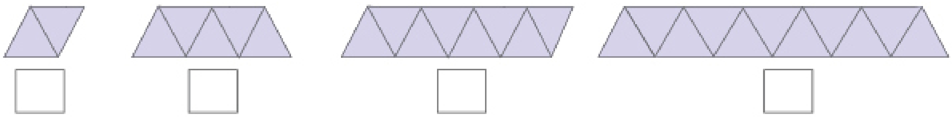
a. $-4n - 1$   b. $-2n + 5$   c. $3 + (-2)(n - 1)$   d. $-n + n + 3$

Comenten con otros compañeros la estrategia que siguieron para determinar las expresiones correspondientes a la regla de cada sucesión. ¿Qué relación hay entre las distintas expresiones que permiten obtener el enésimo término de una sucesión?

## II. Utilizo diferentes expresiones algebraicas para describir progresiones aritméticas: ascendentes y descendentes.

Existen diferentes maneras de representar algebraicamente la regla general que describe una sucesión; dichas expresiones se conocen como equivalentes. Los términos de una sucesión se nombran con una letra. Por ejemplo, $a_1$ representa el primer término, $a_2$ el segundo término, etcétera y $a_n$ el enésimo término.

1. Anoten el número de triángulos contenidos en cada figura de la sucesión.



- ¿Cuál es la diferencia entre los términos consecutivos?
- ¿Qué operación permite obtener el término $a_2$ a partir del primer término?
- ¿Cuántas veces sumas a $a_1$ la diferencia para obtener $a_3$?
- ¿Cuántas veces sumas a $a_1$ la diferencia para obtener $a_4$?

Escriban y resuelvan una operación que incluya el primer término para obtener el término $a_5$ de la sucesión: ______________________________

Describan cómo pueden obtener cualquier término de la sucesión a partir de $a_1$.

- ¿Qué expresión algebraica representa la descripción anterior para obtener $a_n$?

Utilicen la **propiedad distributiva** y simplifiquen la expresión algebraica anterior:

- ¿Por qué se puede afirmar que las expresiones algebraicas anteriores son equivalentes?

**GLOSARIO**

**Propiedad distributiva.** Se puede expresar así: sumar y luego multiplicar es equivalente a multiplicar y luego sumar, es decir, $a(b + c) = a \times b + a \times c$.

2. Utilicen ambas reglas para determinar el número de triángulos de los siguientes términos. En caso de que no coincidan los resultados, revisen sus respuestas para detectar el posible error y corríjanlo.

| Término | $a_{15}$ | $a_{40}$ | $a_{62}$ | $a_{100}$ | $a_{145}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de triángulos | | | | | |

- La ecuación $74 = 2 + 3(n - 1)$ permite saber a qué término le corresponden 74 triángulos. ¿De qué otra forma se puede representar la expresión?
- ¿A qué término de la sucesión le corresponden 74 triángulos?

3. Analicen la siguiente sucesión y resuelvan.

35, 27, 19, 11, 3, –5, –13, –21, –29,...

- ¿La sucesión es ascendente o descendente?
- ¿Cómo se obtiene cada término a partir del anterior?
- ¿Cuál es la constante o diferencia de la sucesión?
- ¿Cuál es la regla que describe la sucesión, usando el primer término?

Escriban de manera simplificada la regla anterior: ______________________________

Establezcan una tercera expresión equivalente para representar la regla de la sucesión: ______________________________________________________________

4. Utilicen dos expresiones algebraicas equivalentes y transformen la primera expresión, para obtener la segunda, con el fin de validar que ambas representaciones sean correctas.

a. –15, –3, 9, 21, 33, 45, 57...
Regla de la sucesión: ___________________ = ___________________

b. 42, 35, 28, 21, 14, 7, 0, –7...
Regla de la sucesión: ___________________ = ___________________

c. 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72,...
Regla de la sucesión: ___________________ = ___________________

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Comenten sobre las estrategias que pueden seguir para encontrar diferentes expresiones algebraicas que describan una misma sucesión. Registren en grupo sus conclusiones.

## Practico

1. Escribe tres diferentes expresiones algebraicas que describan la sucesión de los números pares.

Regla 1: _______________ Regla 2: _____________ Regla 3: _______________

- ¿Cuáles son los términos 45 y 62 de esta sucesión?

2. Elige las expresiones algebraicas que representan cada sucesión.

a. 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, –3, –6,...
$-3(n + 24)$ $-3(n - 1) + 21$ $-3n + 24$ $21 + 3(-n - 1)$

b. –36, –22, –8, 6, 20, 34, 48, 62,...
$-14(n - 1) + 36$ $-36 + 14(n - 1)$ $-14n + 22$ $14n - 50$

## Tomo nota

Una regla general que permite obtener el término $a_n$ de una sucesión aritmética es igual a: $a_n = a_1 + d(n - 1)$, donde $a_1$ es igual al _______ término de la sucesión y $d$ es igual a la _________ entre términos consecutivos.

Otra forma de representar la regla es: $a_n =$ _____ $+ b$, donde $b$ es igual a restar al primer término la diferencia ($d$).

Éstas son expresiones algebraicas ____________ que representan la misma sucesión.

## Utilizo las TIC

Ingresa a: cmed.mx/m238 y resuelve el "Cuestionario #1" sobre sucesiones aritméticas; comprueba el resultado. Si hay error, pide una pista y aprende para seguir practicando.

Y en: cmed.mx/m239 resuelve los ejercicios sobre expresiones equivalentes.

# Recapitulo

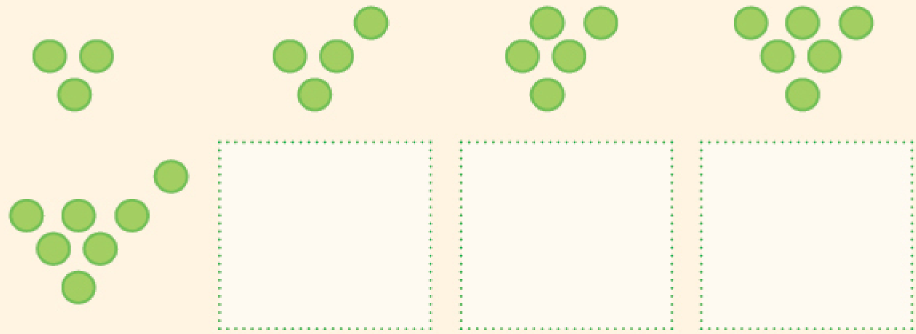
1. Una sucesión es un conjunto ordenado de números o figuras.
2. Una sucesión aritmética tiene la propiedad de que, entre dos términos consecutivos cualesquiera, la diferencia siempre es la misma, es decir, es una constante llamada diferencia.
3. Dos expresiones algebraicas son equivalentes si al asignar valores numéricos a las literales o las incógnitas, se obtiene el mismo resultado.
4. La regla general de una sucesión aritmética es: $a_1 + d(n - 1)$, que es equivalente a $(a_1) - d + dn$.

   Otra expresión que corresponde a la regla general es: $dn + b$, donde $b$ se obtiene al restar al primer término ($a_1$) la diferencia ($d$).

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Dibuja las tres figuras siguientes de la sucesión y escribe dos expresiones algebraicas equivalentes que representen la sucesión numérica que se forma.



Regla 1: ____________ Regla 2: ____________

**2.** Escribe en dos formas diferentes la regla de cada sucesión.

| | Regla 1 | Regla 2 |
|---|---|---|
| **a.** 2, 17, 32, 47, 62,... | ____________ | ____________ |
| **b.** 2.5, 4, 5.5, 7, 8.5,... | ____________ | ____________ |
| **c.** 3.2, 2.1, 1, –0.1, –1.2,... | ____________ | ____________ |

**3.** Subraya las expresiones que son equivalentes a cada expresión dada.

**a.** $3x + x - 2$: $3x - 2x$ $-2 + 4x$ $2x - 2 + 2x$ $4x + (-2x)$

**b.** $3(y + 4)$: $3y + 12$ $3y + 3 \times 4$ $3y + y + 12y$ $3y + 3y \times 4$

**c.** $4 - 5(m + 2)$: $-5m - 10 + 4$ $-5m + 14$ $-6 - 5m$ $-m - 2$

# Logro ir **más allá**

Comprar un automóvil a crédito es una opción a la que muchos mexicanos recurren. Según estadísticas de la Asociación Mexicana de Distribuidores de Automotores (AMDA), dos de cada tres autos se compran por medio de un crédito.

Ésta forma de comprar un automóvil tiene algunas ventajas:

- El crédito permite pagar mes con mes una cantidad relativamente pequeña, comparada con el costo total del vehículo.
- Ayuda a mejorar el historial crediticio, es decir, cumplir con los pagos permite obtener futuros créditos con mayor facilidad.
- Se conoce la cantidad exacta a pagar, sin el temor de que los pagos se incrementen sin previo aviso.

Antes de adquirir cualquier tipo de crédito (deuda), es importante evaluar si los ingresos y los gastos fijos permiten pagarlo. Es un esfuerzo que puede ser de largo plazo y que implica responsabilidad, por lo que es muy importante informarse y cumplir con los pagos para que no sea una preocupación más.

**1.** Lee la siguiente situación y resuelve.

Susana adquirió a crédito un automóvil por el cual pagará \$147 000 en total. Dio un pago inicial, y a partir del siguiente mes (primero del crédito) pagará una cantidad mensual fija hasta liquidar su deuda.

La expresión algebraica que representa la deuda mensual de Susana es:
$-3\,500n + 126\,000$.

- ¿De cuánto fue el pago inicial de Susana? ¿Cómo lo determinaste?
- ¿Cuál será el pago mensual? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué representa $n$ en la expresión?
- ¿Por qué la constante que acompaña a $n$ tiene signo negativo?

**2.** Escribe de otra manera la expresión algebraica que describa la deuda mensual de Susana.

- ¿Qué expresión algebraica permite saber en cuántos meses liquidará Susana el automóvil?
- ¿En cuántos meses pagará el automóvil?

**Utilizo las TIC**

Entra a esta página, que te orientará sobre cómo hacer uso del crédito para tener finanzas sanas. Compártela con tu familia: cmed.mx/m240

L16

# Solución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales de 2 × 2

Exploro

**Reconozco los puntos de la recta $y = ax + b$ como soluciones de una ecuación lineal.**

Roberto y María estaban jugando un juego que consiste en encontrar dos números que sumen 10, y no saben si la sólución es única o si existen muchas soluciones.

- ¿Cuál es la ecuación que representa el juego en términos de $x$ y $y$?
- ¿Existe una única solución? ¿Por qué?

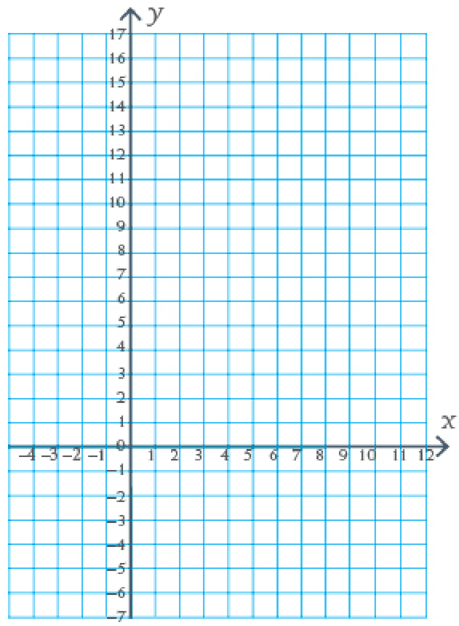
Completa la lista de todas las parejas de números enteros positivos que sumen 10

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1, 9) | | (3, 7) | | | | | | | |

Roberto siguió elaborando la lista con números enteros, mientras que María buscaba también parejas como (0, 10), (–1, 11), (–2, 12), (1 325, –1 315),…

- Roberto y María se dieron cuenta de que el juego nunca acabaría. ¿Por qué consideras que pensaron así?
- Despeja $y$ en la ecuación: _______________
- Asigna a $x$ los valores que muestra la tabla y calcula los que corresponden a $y$; completa la tabla.
- Localiza en el plano los puntos que corresponden a los valores de la tabla.

| $x$ | $y$ | Punto |
|---|---|---|
| 5 | 5 | A: (5 , 5) |
| 0 | | B: ( , ) |
| 10 | | C: ( , ) |
| 2 | | D: ( , ) |
| –2 | | E: ( , ) |




Une con una línea los puntos que marcaste en el plano.

- ¿Qué tipo de línea es la resultante?
- ¿Cualquier punto sobre dicha línea solucionaría la ecuación? ¿Por qué?
- ¿El punto (–34, 24) puede ser una solución a la ecuación? Justifica tu respuesta.

Comenta con una pareja: ¿existe un punto de la recta que no sea solución de la ecuación? Compartan sus resultados, comparen los puntos y la gráfica de la recta, y concluyan si la ecuación determina una única recta y si existe una única solución, o no.

## I. Conozco los pasos del método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones 2 × 2.

1. Retoma el problema de la actividad anterior y resuelve.

El juego de Roberto y María se complica más si se considera la ecuación $2x + y = 12$.

Completa las siguientes instrucciones del juego a partir de la ecuación anterior: "Encuentra dos números que cumplan con que el ___________ del primero más el ___________ da como resultado ___________."

Despeja $y$ en la ecuación, asigna a $x$ un número entero positivo y resuelve.

- Si $x = 0$, ¿cuál es el valor de $y$? _____ Si $y = 2$, ¿cuál es el valor de $x$? _____. Grafica, en el plano cartesiano de la página anterior, las soluciones que obtuviste y traza la recta.
- ¿El punto (–1, 23) y el punto (5, 15) son solución de la ecuación? Justifica tu respuesta en función del plano.

Ahora la situación del problema se plantea así: Piensa en dos números que sumados den 10 y que el doble del primero más el segundo sea igual a 12.

- ¿Qué sistema de ecuaciones representa la situación?
- ¿En qué punto se intersecan las rectas en el plano?

Sustituye las incógnitas del sistema de ecuaciones por los valores anteriores y resuelve.

- ¿Qué observas? ¿Qué representa el punto donde se intersecan las rectas?

2. Resuelve en pareja la siguiente situación.

Karina va a la tienda a comprar leche y jugo. Por dos litros de leche y dos de jugo pagó \$52.00. El precio de la leche es \$6.00 más caro que el precio del jugo. Determinen el costo de cada producto siguiendo estos pasos:

❖ Identifiquen las incógnitas del problema.

❖ Asignen al jugo la letra $x$ y a la leche la letra $y$ y escriban el sistema que representa el problema:

Costo total: ________. Diferencia en el precio de los productos: ___________

❖ Despejen $y$ en la primera ecuación y simplifiquen: ____________

Anoten los valores de $y$ a partir de los valores asignados a $x$ en cada tabla de la derecha, sustituyendo $x$ por los valores correspondientes en las ecuaciones.

Construyan un plano cartesiano en su cuaderno y grafiquen ambas rectas colocando los puntos coordenados de cada tabla en el plano cartesiano.

- ¿En qué punto o coordenada se intersecan las rectas?
- Sustituyan los valores de las coordenadas en las ecuaciones del problema y resuelvan. ¿Qué sucedió?
- ¿Cuáles son los precios de la leche y del jugo?

Costo total

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 6 | |
| 8 | |
| 10 | |
| 12 | |

Diferencia en el precio

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 6 | |
| 8 | |
| 10 | |
| 12 | |

Reúnanse con otras parejas y comparen sus despejes, sus rectas y sus soluciones. ¿Coinciden? ¿Graficaron los mismos puntos? Si sus resultados no coinciden, revisen sus procedimientos y lleguen a un acuerdo. ¿Qué representa el punto de intersección de las rectas con respecto al sistema de ecuaciones que representan? ¿Será una manera general de resolver sistemas de ecuaciones?

**II. Relaciono el número de soluciones de un sistema de ecuaciones con la relación de las rectas que lo representan.**

1. Resuelve el siguiente problema.

Dos tinacos idénticos de forma cilíndrica que tienen una altura de 72 cm comienzan a llenarse. La altura del agua en ambos aumenta 3 cm cada minuto. El tinaco 1 se encontraba vacío y el tinaco 2 ya tenía 20 cm de agua al empezar a llenarse.

- ¿Cuál es la altura del agua en cada uno después de 10 minutos?
- ¿En algún momento la altura del agua en ambos tinacos será la misma? Argumenta tu respuesta.
- Escribe, con un sistema de ecuaciones, la altura en cm ($y$) de cada tinaco después del tiempo en minutos ($x$).

Tinaco 1: ______________ Tinaco 2: ______________

Tinaco 1

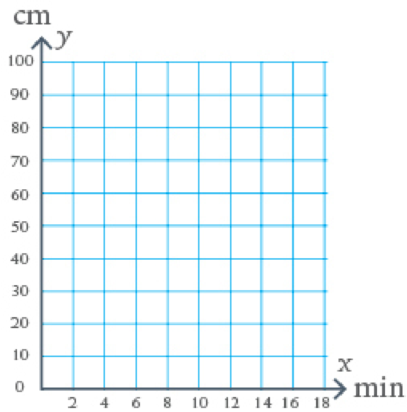
| $x$ (min) | $y$ (cm) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | |
| 4 | |
| 6 | |
| 8 | |
| 10 | |
| 12 | |
| 14 | |

Tinaco 2

| $x$ (min) | $y$ (cm) |
|---|---|
| 0 | |
| 2 | |
| 4 | |
| 6 | |
| 8 | |
| 10 | |
| 12 | |
| 14 | |

Completa las tablas de la izquierda y utiliza los puntos para graficar la rectas en un mismo plano.

- A partir de la gráfica, ¿qué relación existe entre las rectas?
- ¿Cuál es la solución al sistema de ecuaciones que describe el problema? Explica tu respuesta.




2. Analiza la siguiente información y realiza lo que se pide.

"Encontrar dos números que sumados den 48 y que sus dobles sumen 96".

Escribe el sistema de ecuaciones correspondiente al problema:

Completa una tabla para cada caso y grafícalas en tu cuaderno.

- ¿Qué características tienen las rectas?
- ¿Qué pareja de números es solución al problema?
- ¿Cuántas soluciones distintas tiene el sistema de ecuaciones?

3. Despeja $y$ en las siguientes ecuaciones y completa una tabla en la que asignes diferentes valores a $x$ para encontrar los valores de $y$. Grafica las ecuaciones.

$3y + 2x = 1$ $\quad y = \frac{4}{6}x + 1$ $\quad 2x - 3y = 2$ $\quad y = \frac{2}{3} - 3x$

Identifica las rectas que son paralelas y que no intersecan al eje $y$ en el mismo punto a la gráfica de la ecuación $y = \frac{2}{3}x - 4$.

- ¿Qué representa que en un sistema de ecuaciones las rectas paralelas compartan todos sus puntos?
- ¿Qué sucede cuando las rectas son paralelas e intersecan al eje $y$ en diferentes puntos?

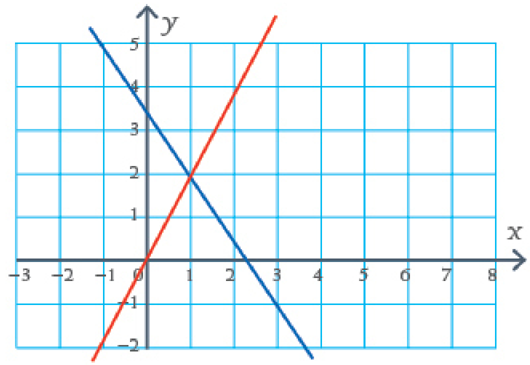
Establece, en pareja, un argumento para determinar el número de soluciones a un sistema a partir de las características de la pareja de rectas que representa. Tracen, en su cuaderno, la representación gráfica de cada inciso del *Tomo Nota*.

## Tomo Nota

Un sistema de ecuaciones puede resolverse por el método gráfico y se pueden tener los siguientes tres casos:

1. Las rectas se intersecan en **un punto** ($x$, $y$) que representa la ____________; en este caso se le llama sistema **compatible determinado**.
2. Cuando las rectas son paralelas, con diferente punto sobre $y$, el sistema ____________ solución y se dice que es **incompatible**.
3. Cuando las rectas de ambas ecuaciones coinciden en todos sus ___________, el sistema tiene ____________ de soluciones y se le conoce como **compatible indeterminado**.

## III. Resuelvo problemas de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método gráfico.




Trabajen en pareja y resuelvan los siguientes ejercicios:

1. Observen las gráficas, etiqueten cada una de las rectas con su ecuación y determinen el punto de intersección para hallar la solución del sistema de ecuaciones:

   $3x + 2y = 7$ Punto de intersección: __________

   $y = 2x$ Solución: $x =$ _____ $y =$ _____

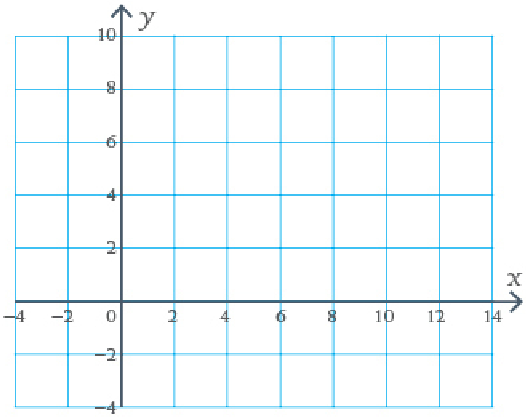
2. Resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones por el método gráfico; completen la tabla, escojan los valores y grafiquen las rectas utilizando el plano cartesiano que aparece a continuación.

$y = 2x + 1$

| x | y |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

$y = 3x + 1$

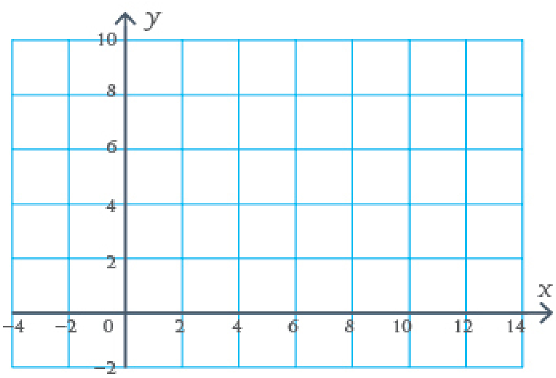
| x | y |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |




3. Grafiquen, en su cuaderno, las rectas del sistema de ecuaciones:

   $y = \frac{(3x + 4)}{6}$ $y = \frac{(x - 3)}{2}$.

   - ¿Qué tipo de sistema representan? Justifiquen su respuesta.
     Tipo de sistema: ____________________
     Justificación: ____________________




4. Completen la actividad:
   Los drones de Benjamín y Marcela vuelan en línea recta en una misma área y sus trayectorias están descritas por las siguientes ecuaciones.

   Dron de Benjamín: $y = 4x - 18$
   Dron de Marcela: $y = 3x - 12$

   Elaboren, en su cuaderno, una tabla de valores para cada una de las trayectorias.
   Grafiquen las rectas en el plano de la derecha.

   - Encuentren la intersección de las rectas. ¿Qué relación tiene con los drones?

   Propongan una trayectoria para otro dron que garantice que no chocará con el dron de Benjamín. Registren sus procedimientos y resultados.

5. Brenda y Raúl son choferes de tráiler en la misma compañía de transportes. En una ocasión viajaron por la misma carretera en sentidos opuestos e iniciaron su viaje al mismo tiempo. Como parte de la rutina, conversaron por radio al comenzar su trayecto:

Brenda: Estoy saliendo del kilómetro 900 a una velocidad promedio de 80 km por hora, cambio.
Raúl: Voy saliendo del kilómetro cero a 70 km por hora, cambio.
Brenda: Nos encontramos en el camino, cambio y fuera.
Raúl: Cambio y fuera.

- ¿En qué kilómetro se encontraba cada tráiler tras una hora de recorrido? ¿Qué distancia había recorrido cada tráiler después de tres horas?
- ¿En qué kilómetro y después de cuánto tiempo se encontraron en la carretera? ¿Qué distancia recorrió cada quien hasta el punto de encuentro?

Representen en un mismo plano cartesiano la gráfica que muestre el recorrido de ambos choferes.

- ¿En qué coordenada se intersecan las gráficas?
- ¿Qué relación tiene este punto con la respuesta del problema?

Elijan el sistema de ecuaciones que represente la situación y resuélvanlo.

| | | |
|---|---|---|
| a. $80x + y = 900$ | b. $80x + 900 = y$ | c. $y = 80x - 900$ |
| $70x - y = 0$ | $70x = y$ | $70x - y = 0$ |

- ¿Qué representan $x$ y $y$ en el sistema de ecuaciones?
- ¿Cuáles son las soluciones del sistema de ecuaciones?

**Utilizo las TIC**

Pueden utilizar *Geogebra* o cualquier otra herramienta de gráficas para visualizar la solución gráfica de un sistema de ecuaciones. Ingresen a:

cmed.mx/m241

Grafiquen los sistemas de ecuaciones de la lección para validar sus respuestas.

6. En la rosticería "El pollo frito" venden un paquete A con seis piezas de pollo y cuatro botellas de agua por $224.00; tienen también el paquete B, con dos piezas de pollo y una botella de agua por $66.00.

   a. Escriban el sistema que representa el problema, donde $y$ es el costo de la botella de agua, en pesos, y $x$ el de las piezas de pollo.
   b. Escriban los despejes de $y$ en ambas ecuaciones.

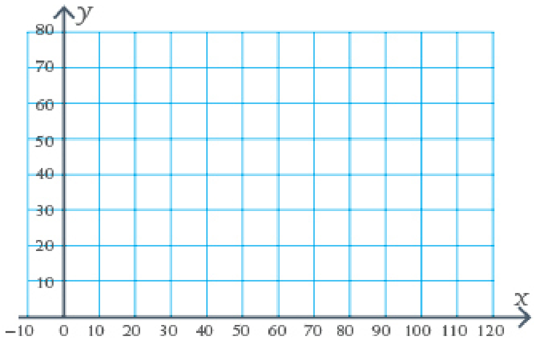
c. Completen las siguientes tablas:

Paquete A

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 10 | |
| 15 | |
| 20 | |
| 25 | |
| 30 | |

Paquete B

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 10 | |
| 15 | |
| 20 | |
| 25 | |
| 30 | |




d. Grafiquen las rectas en el plano cartesiano anterior.

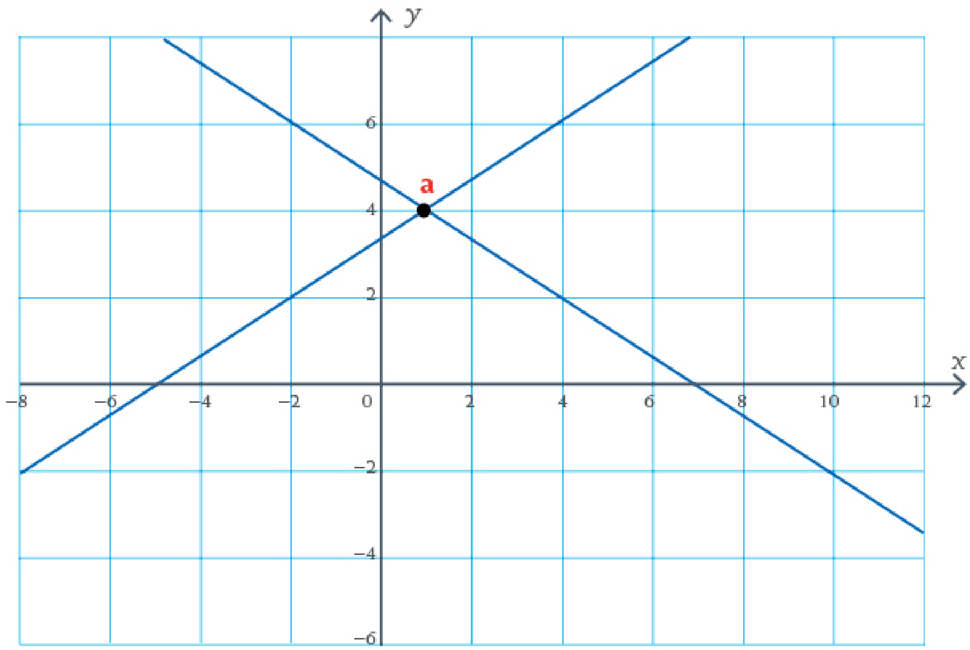
- ¿Cuánto cuesta cada pieza de pollo y cada botella de agua?

Comparen sus respuestas con otra pareja de compañeros; si sus resultados difieren, revisen los procedimientos y lleguen a acuerdos.

**Practico**

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método gráfico. Traza las rectas y localiza los puntos de intersección sobre el plano cartesiano. Mostramos la solución del inciso "a" como ejemplo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$<br>$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$<br>( 1, 4 ) | b. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$<br>$y = \frac{2}{3}x - \frac{14}{3}$<br>(_____ , _____) | c. $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$<br>$y = -\frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$<br>(_____ , _____) | d. $y = \frac{2}{3}x - \frac{14}{3}$<br>$y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$<br>(_____ , _____) |




- ¿Qué figura puedes reconocer en la gráfica?

**Utilizo las TIC**

Para practicar más sobre la solución de sistemas por el método gráfico consulten la siguiente página, revisen el ejemplo resuelto y encuentren la solución a los problemas que se plantean.

cmed.mx/m242

# Recapitulo

1. Un sistema de ecuaciones lineales de $2 \times 2$ se puede representar geométricamente con dos rectas en el plano.
2. La solución de un sistema de ecuaciones es el punto de intersección de las rectas.
3. La representación gráfica del sistema de ecuaciones permite determinar cuántas soluciones tiene el sistema.
4. Si las rectas son transversales o se intersecan en un solo punto, tienen una única solución.
5. Si las rectas son paralelas e intersecan al eje $y$ en diferentes puntos, el sistema no tiene solución.
6. Si las ecuaciones representan la misma recta, hay una infinidad de soluciones.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

1. Escribe las ecuaciones de dos rectas paralelas.

2. Escribe dos ecuaciones distintas que representen la misma recta.

3. Érika renta dos películas y un videojuego y paga \$65.00. Los videojuegos cuestan \$5.00 más que las películas.
   a. Escribe el sistema que representa el problema.
   b. Grafica en tu cuaderno las rectas correspondientes.
   c. Encuentra la solución al sistema localizando el punto de intersección.
   - ¿Cuánto cuesta la renta de una película? ¿Y la renta de un videojuego?

4. Dados los siguientes sistemas, escriban "cd" si el sistema es compatible determinado, "i" si es incompatible y "ci" si es compatible indeterminado.

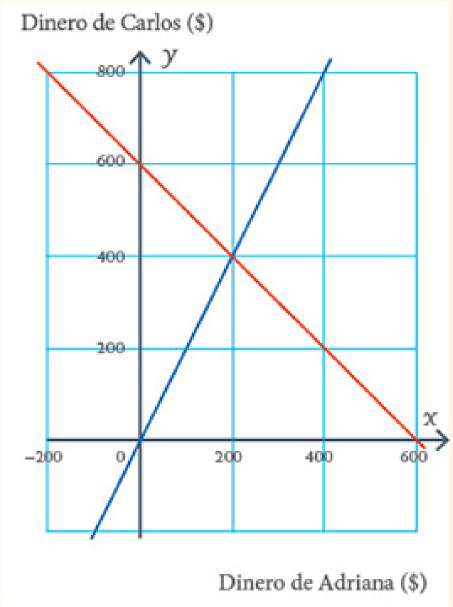
a. $2x + 3y = 15$; $y = 2x + 5$ ________

b. $x + 4y = 20$; $y = -\frac{x}{4} + 5$ ________

c. $5x + 4y = 16$; $y = 4$ ________

d. $5x + 3y = 6$; $10x + 6y = 10$ ________

5. Adriana y Carlos juntaron \$ 600.00 para el regalo de su mamá, pero Carlos puso el doble de dinero.
   ➤ Escribe el sistema que representa el problema. Establece como $x$ la cantidad de dinero de Adriana y como $y$ la cantidad de Carlos.
   ➤ Determina cuánto dinero puso cada quien.




6. Utiliza el método gráfico para resolver el siguiente problema en tu cuaderno.
   - La edad de Marcela y la de su papá suman 38 años. Si dentro de cinco años la edad del papá será el triple de la de Marcela, ¿qué edad tiene cada uno?

7. Para cercar un terreno rectangular se requieren 64 m de malla ciclónica, y para cercar otro terreno rectangular se necesitan 88 m; los dos terrenos tienen el mismo ancho pero el largo del segundo es el doble del primero.
   - ¿Cuáles son las dimensiones de ambos terrenos? Utiliza el método gráfico y encuentra la solución.

# Logro ir más allá

1. En la actualidad existen distintas compañías de telefonía móvil.

Andrés está decidiendo cuál de dos planes de telefonía móvil contratar. Un plan, HabLot, aplica un cargo fijo de $150.00 al mes con minutos ilimitados. Otro plan, AmigoFon, aplica un cargo mensual de $50.00 además de cobrar 20 centavos por minuto de llamada.

Para examinar los planes, Andrés elaboró las ecuaciones que corresponden al costo de cada compañía:

HabLot: ______________________

AmigoFon: ____________________

- Grafica las rectas que corresponden a cada compañía en el siguiente plano cartesiano:
- De acuerdo con los minutos que utiliza regularmente, Andrés se dio cuenta de que le costaría lo mismo en cualquier compañía. ¿Cuántos minutos utiliza al mes?
- María habla 700 minutos al mes, ¿qué compañía le convendría más? ¿Cuánto pagaría?

La compañía Movipay dice que ofrece el mejor plan del mercado: no establece una renta fija y cobra 22.5¢ por minuto.

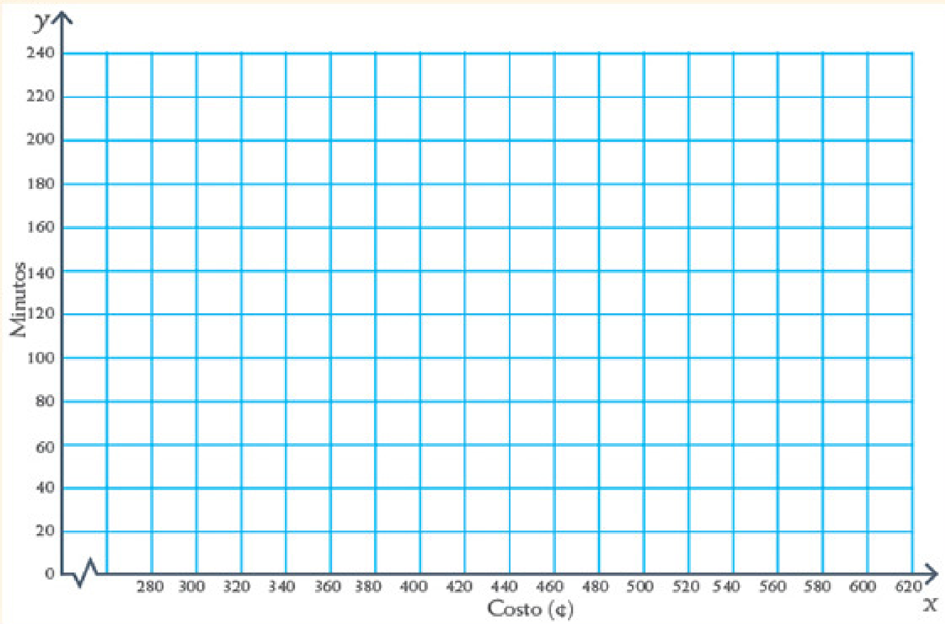
- Agrega la gráfica de la tercera compañía en el mismo plano. Encuentra las intersecciones de las tres rectas por pares.

HabLot y Movipay: ______________________

Amigofon y Movipay: ______________________

HabLot y Amigofon: ______________________

- Determina el número máximo de minutos para que Movipay sea la compañía con menor costo.




2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, grafica las rectas que representa cada ecuación y encuentra el punto de intersección. $3x - y = 11 \qquad 2x + y = 9$
   - ¿Cuál es la solución al sistema?

L17

# Resolución de problemas que implican conversiones entre unidades de longitud, masa y capacidad

La medición es un proceso que se basa en comparar un patrón seleccionado con el objeto o fenómeno cuya magnitud se quiere determinar. Desde la antigüedad, el ser humano ha realizado mediciones con distintos instrumentos. Actualmente el **Sistema Internacional de Medidas** (SI) es el que rige las unidades de medida que se usan en la mayoría de los países del mundo. Las principales unidades de medida son: de longitud, el metro (m); de masa, el kilogramo (kg); y de capacidad, el litro (l o L).*

Exploro

## Resuelvo problemas verbales de medición.

Realizar campañas de donación de sangre es una práctica común y muy necesaria para ayudar a las personas que la necesitan.

La delegación Benito Juárez de la Ciudad de México, junto con el Banco de Sangre, se han propuesto como meta reunir 200 litros de sangre, considerando que cada individuo puede donar entre 405 mL y 450 mL.

Con la información anterior, quieren hacer una estimación de cuántas personas se necesitan para llegar a la meta.

Para hacer los cálculos, considera un promedio de 430 mL de sangre por persona; completa lo siguiente y responde.

La cantidad de 430 mL es aproximadamente _________ litro de sangre.

De acuerdo con la notación, mL se lee ______, esto es, en un litro hay _____ mililitros.

- ¿Cuántas personas estimas que se necesitan para reunir 200 litros?
- ¿Cómo lo determinaste?

En el cuerpo de un adulto hay un promedio de 5 litros de sangre.

- ¿A cuántos mililitros equivale?

Si tenemos 70 mL de sangre por kilogramo de masa, calcula cuántos mililitros de sangre tienes en el cuerpo.

Compara tus respuestas en pareja. ¿Sabían cuánta sangre tienen en su cuerpo? Platiquen en grupo sobre la importancia de donar sangre, sus preocupaciones al respecto y si estarían dispuestos, cuando sean adultos, a ser donadores.

**Leo +**

¿Sabes qué significa ser **altruista**?
Las personas que donan sangre de manera altruista, es decir, desinteresadamente, lo hacen por el bien ajeno, sin importar el propio. La sangre es un soporte básico de la vida. ¿Te parece que el altruismo es una cualidad admirable?

Entra a: cmed.mx/m243 y lee sobre la donación **altruista** de sangre. Comparte esta información con tu familia. Difundir lo que has aprendido sobre este tema es de vital importancia para crear conciencia y una cultura altruista.

* Nota: La NOM-008-SCFI-2002, modificada en septiembre de 2009, acepta ambas unidades para la medida de capacidad. En esta obra adoptamos (L) como criterio.

Descubro y construyo

**I. Desarrollo procedimientos para hacer conversiones de magnitudes de longitud en el Sistema Internacional (SI) y resuelvo problemas.**

1. María recorre 1.5 km del trabajo a su casa; dos tercios del camino los hace corriendo y el resto, caminando.
   Calcula el recorrido de María en metros.
   - ¿Qué distancia corre?
   - ¿Cuántos metros recorre caminando?
2. Completa la siguiente tabla a partir de la equivalencia entre los múltiplos y submúltiplos del metro. Observa el ejemplo.

| | Submúltiplos | | | Metro (m) | Múltiplos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Milímetro (mm) | Centímetro (mm) | Decímetro (dm) | | Decámetro (Dam) | Hectómetro (hm) | Kilómetro (km) |
| Longitud de una abeja | 14 | 1.4 | 0.14 | 0.014 | 0.0014 | 0.00014 | 0.000014 |
| Ancho de un automóvil | | | 24.5 | | | | |
| Radio de una llanta de bicicleta | | 48.35 | | | | | |
| Largo de una cancha de volibol | | | | 18 | | | |

3. Responde a partir de las equivalencias de la tabla.
   - ¿Qué procedimiento permite pasar de una unidad a la siguiente menor? Escribe un ejemplo.
   - ¿Cómo se pasa de una unidad de medida a la siguiente mayor? Escribe un ejemplo.
4. Resuelve los problemas.
   a. Roberto se entrena para una carrera y da vueltas en un parque recorriendo 400 m por vuelta; ¿cuántas vueltas completas tendrá que dar si quiere recorrer al menos 5 km diarios?
   b. El primer golpe de Gabriel en un juego de golf alcanzó $\frac{3}{5}$ partes de la distancia al hoyo. Si en el segundo golpe alcanzó el hoyo al recorrer una distancia de 750 dm, ¿a qué distancia del hoyo, en metros, se encontraba al empezar a jugar?
5. Realiza las siguientes conversiones:
   a. 2.34 dam = _________ cm  b. 0.087 km = _________ dm
   c. 437 m = __________ hm  d. 2737.34 mm = _________ km

Reúnete con un integrante del grupo, comparen sus respuestas y verbalicen el procedimiento para convertir una magnitud de longitud de una unidad mayor a una menor, y de una menor a una mayor. Discutan la utilidad del sistema decimal en este proceso.

**II. Desarrollo procedimientos para hacer conversiones entre unidades de masa en el Sistema Internacional (SI) y resuelvo problemas con ellos.**

"La producción de trigo grano `Hecho en México´ se incrementó 14.6 por ciento de 2013 a 2016… afirmó la Secretaría de Agricultura, Ganadería, Desarrollo Rural, Pesca y Alimentación (SAGARPA)." La producción en 2013 fue de tres millones 352 mil toneladas, por lo que se reportó un crecimiento en la producción de este cultivo de casi 500 000 toneladas, de 2013 a 2016.

**Fuente:** http://www.sagarpa.gob.mx/Delegaciones/zacatecas/boletines/Paginas/2017B102M.aspx

1. Respondan en parejas a partir de la información anterior.
   - ¿Cuántos kilogramos de trigo se produjeron en México en 2013?
   - ¿A cuántos kilogramos corresponde la producción de 2016?

2. Completa la tabla de equivalencias de múltiplos y submúltiplos del gramo

| Unidad | Equivalencia (g) |
|---|---|
| 1 mg | |
| 1 cg | |
| 1 dg | |
| 1 g | |
| 1 dag | |
| 1 hg | |
| 1 kg | |
| 1 Tonelada (t) | |

## Tomo Nota

En Física, **masa** y **peso**, son conceptos diferentes, no significan lo mismo, aunque en la vida cotidiana se utilicen ambas palabras con el mismo sentido.

La unidad de masa ($m$) en el Sistema Internacional de Medidas es el kilogramo (kg). El peso ($P$) es la fuerza con que la Tierra atrae un cuerpo ($P = mg$). La masa no varía pero el peso sí, porque depende de la fuerza de gravedad ($g$); por ejemplo, el peso de una persona en la Tierra no es el mismo que en la Luna.

3. Convierte 356.2 mg a kg.
   - ¿Qué operación realizaste?
4. Si para hacer un pastel se requieren 750 g de harina, ¿cuántos pasteles enteros se podrían hacer con 10 kg de harina?
5. Un helicóptero lleva arena para apagar un incendio, y es capaz de sostener una masa libre promedio de 400 000 kg. Calcula cuántos decagramos más puede cargar si lleva 228 735 564 g?
6. La masa de un feto en la semana 18 es de 190 g en promedio; calcula la masa en kilogramos al nacer, sabiendo que equivale a $\frac{37}{2}$ de la masa de la semana 18.
7. Completen las siguientes conversiones:

a. 825 mg = _____ g  b. 25763 cg = ______ hg  c. 34.658 kg = _______ dag

Compartan con otras parejas sus resultados y revisen sus procedimientos; establezcan un algoritmo para convertir las unidades de masa a múltiplos y submúltiplos del gramo. ¿Qué diferencia encuentran entre el procedimiento para la conversión de unidades de longitud y de masa?

## III. Construyo procedimientos para hacer conversiones de unidades de capacidad en el Sistema Internacional (SI) y resuelvo problemas con ellos.

Trabaja en pareja, y resuelvan los siguientes problemas.

1. La mamá de Isabel está pintando su cuarto de color morado; mezcló un tercio de pintura roja con $\frac{2}{3}$ de litro de pintura azul, logrando así 3.5 L de pintura. ¿Qué cantidad de mililitros de pintura roja utilizó?
2. En muchas dosis se utiliza la gota como unidad de medida; si 20 gotas equivalen a 1 mL, ¿cuántas gotas hay en una cubeta de 5 litros?
3. Desarrollen la tabla de múltiplos y submúltiplos entre unidades de capacidad, escriban su nombre abajo y coloquen, arriba o abajo de cada flecha, la operación que se tiene que realizar para hacer la conversión de unidades, como en el ejemplo.

| mL | | | L | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| mililitro | | | litro | | | |

×1000

4. Escriban 57.8 cL en dL. _________
   - ¿Qué hicieron para calcularlo? ________________________________________
5. Escriban la equivalencia entre unidades

| | | |
|---|---|---|
| 537.5 cL | = | ____________ daL |
| 87.7 daL | = | ____________ mL |
| 8 kL | = | ____________ dL |
| 23 543 mL | = | ____________ kL |
| 7.835 hL | = | ____________ cL |

6. El señor Ernesto tiene que vaciar un tinaco con capacidad de 0.75 kL. Calcula cuántas cubetas de 60 dL podría llenar al vaciar el tinaco.
7. Cuatro contenedores de aceite con capacidades de 3.5 L, 458 cL, 91 dL, 5 346 mL respectivamente se vacían en uno de mayor tamaño. Si el contenedor mayor tiene capacidad para 25 L, ¿podrá recibir esa cantidad de aceite sin que se derrame? Justifiquen su respuesta.
8. La mamá de Ana compró un juego de tres ollas; la más grande es 1.5 L mayor que la chica de 25 dL, y la mediana es 100 cL menor que la grande. Calculen la capacidad de las tres ollas.

Comparen sus resultados con los de otra pareja y comenten sobre las magnitudes que se miden en litros. ¿Cómo se mide el gas? En muchos lugares de México se utilizan envases de 1 L, $\frac{1}{2}$ L y $\frac{1}{4}$ de litro para medir sólidos como arroz o cacahuate. Coméntenlo con sus compañeros y reflexionen sobre su utilidad.

## Tomo Nota

Algunas equivalencias de tiempo son:
1 h = 60 min
1 min = ___ s
___ h = 3 600 s.

### IV. Problemas de cambio de unidades utilizando factores de conversión.

En física has estudiado magnitudes que se miden en unidades compuestas, como las magnitudes de fuerza, por ejemplo, el peso, se miden en unidades de masa por aceleración, y las de velocidad con unidades de distancia sobre tiempo; en ocasiones tienes que convertir estas unidades utilizando múltiplos y submúltiplos.

1. Encuentra el valor de $x$ en cada uno de los ejercicios:

**a.** $\frac{1\text{ km}}{1000\text{ m}} = x$ $x=$ ______ **b.** $\frac{1\text{ dg}}{x\text{ cg}} = 1$ $x=$ ______ **c.** $\frac{1\text{ L}}{x\text{ mL}} = 1$ $x=$ ______ **d.** $\frac{x\text{ m}}{1\text{ mm}} = 1$ $x=$ ______

Para cambiar magnitudes utilizando los **factores de conversión** se siguen estos pasos:
Ejemplo: convertir $\frac{8\text{ kg}}{\text{l}}$ a $\frac{\text{g}}{\text{dl}}$.

- Observa las unidades que tienes y a qué unidad quieres convertirlas.
- Construye factores de valor uno; coloca en el numerador o en el denominador las unidades que quieres que se anulen para que queden las que necesitas.
- Realiza las operaciones correspondientes y simplifica las unidades.

$$8\,\frac{\cancel{\text{kg}}}{\cancel{\text{l}}} \times \frac{1000\text{ g}}{1\,\cancel{\text{kg}}} \times \frac{1\,\cancel{\text{L}}}{10\text{ dL}} = 800\,\frac{\text{g}}{\text{dL}}$$

## Glosario

**Factor de conversión.** Es una operación matemática que sirve para cambiar unidades de la misma magnitud y expresarlas de una manera diferente. Se utiliza también para encontrar equivalencias en múltiplos y submúltiplos de la misma unidad.

2. Plantea el factor de conversión adecuado y realiza la conversión, siguiendo el ejemplo. Se tienen 73.5 mL y se quieren convertir a hL. El factor de conversión es $\frac{1\text{ hL}}{100\,000\text{ mL}} = 1$, por lo que si multiplicamos $73.5\,\cancel{\text{mL}} \times \frac{1\text{ hL}}{100\,000\,\cancel{\text{mL}}} = 0.000735$ hl y eliminamos los mililitros.

Para convertir 524 g a hg, tenemos que multiplicar por ______ y el resultado es ______.

3. Completa con las equivalencias de magnitudes utilizando los factores de conversión.

**a.** $25\,\frac{\text{cm}}{\text{mL}} \times$ __________ $\times$ __________ $=$ ☐ $\frac{\text{hm}}{\text{L}}$

**b.** 0.3 dag m $\times$ __________ $\times$ __________ $=$ ☐ g cm

**c.** $7.38\,\frac{\text{L}}{\text{h}} \times$ __________ $\times$ __________ $=$ ☐ $\frac{\text{cL}}{\text{s}}$

- ¿Por qué se pueden simplificar las unidades?

4. ¿Cuál de las siguientes unidades es mayor?

**a.** $12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ **b.** $78\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}$ **c.** $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **d.** $3.2\,\frac{\text{dam}}{\text{s}}$

- ¿Qué hiciste para determinarlo?

5. Si una persona corre dos metros por segundo, ¿cuál es su velocidad en km/h?

**Utilizo las TIC**

Entra a este sitio, en donde encontrarás la teoría sobre factores de conversión. Selecciona "Evaluación" y resuelve los 15 ejercicios. Una vez que respondas correctamente el primero,selecciona el siguiente en la flecha de arriba.
cmed.mx/m244

6. Convierte las siguientes magnitudes.

$8\ \text{kg m} = \_\_\_\_\ \text{g cm}$ $\quad 25\ \frac{\text{L}}{\text{s}} = \_\_\_\_\ \frac{\text{hL}}{\text{h}}$ $\quad 43.45\ \frac{\text{dg}}{\text{cL}} = \_\_\_\_\ \frac{\text{kg}}{\text{L}}$

Reúnanse en equipos de cuatro integrantes y compartan sus ejercicios; discutan sobre la importancia de las conversiones, cómo las han aplicado en el curso de Física y cómo se puede utilizar el método de los factores de conversión para hacer una conversión simple en múltiplos o submúltiplos de una unidad.

## Practico

1. Para hacer un pastel de chocolate, por cada 0.5 kilogramos de harina hay que añadir 100 gramos de cocoa.

   - Si quiero hacer un gran pastel de chocolate con 100 dag de harina, ¿cuánta cocoa necesito?

2. La banda de una caminadora mide 1.8 m.

   - ¿Cuántas vueltas dará en 1.8 km?
   - ¿Cuántos kilómetros recorrerá la banda después de dar 1 500 vueltas?

3. Ordena de mayor a menor las siguientes magnitudes, colocando las cantidades en la tabla.

   75 g     2 356 mg     0.087 kg     4.3 dg     0.034 hg

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | > | | > | | > | | > | |

4. Un autobús recorre 8 km por cada litro de diésel que utiliza.

   - Si el chofer compró 5 cubetas de 2.5 dal de diésel, ¿le alcanzará para recorrer 8 872.3 hm?
   - De ser así, ¿cuántos litros de diésel le sobran?

5. Una abeja vuela a 62 km/h en promedio. Si vuela durante 24 min, ¿cuántos metros habrá recorrido?

6. La velocidad del sonido es de 340 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; calcula la velocidad en $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

7. El río Usumacinta lleva un flujo de 5 250 $\frac{\text{kL}}{\text{s}}$; determina el flujo en daL/min.

8. Convierte 345 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

9. En un triatlón juvenil se corrieron 15 km, se cubrieron 80 hm en bicicleta y se nadaron 375 dam. ¿Qué distancia se recorrió en el triatlón? Escribe tu respuesta en metros.

**Leo +**

Entra a esta liga y selecciona "Historia del sistema sexagesimal". Conocerás cuál es el origen de este sistema para medir el tiempo.
www.bartolomecossio.com/MATEMATICAS/viii_sistema_sexagesimal.html

Si te interesa ser un experto en este tema, revisa todos los apartados de este recurso y disfruta mientras aprendes.

L18

# Conversión entre unidades del Sistema Inglés y unidades del SI

Aun en esta época de globalización, además del Sistema Internacional de Medidas (SI) se sigue utilizando el Sistema Inglés en varios países, como Estados Unidos. Este sistema, también llamado Imperial, es más antiguo que el SI y ha ido evolucionando desde el Imperio Romano hasta nuestros días. Por ejemplo, las tuercas, tornillos y tuberías son objetos que se miden en pulgadas.

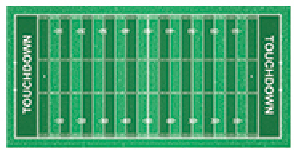
La **pulgada** (abreviada **in**, de *inch*) es una medida **antropométrica** (medida del hombre), es decir, proviene de la medida del largo de la segunda falange de un dedo pulgar humano.

Exploro **Resuelvo problemas formulados en unidades de medida del Sistema Inglés.**

1. La mamá de Enrique cose y quiere hacerle un pantalón a su hijo. Para ello debe copiar las medidas de un pantalón de Quique, el cual dice en la etiqueta que tiene 28 in (pulgadas) de cintura y 30 in de largo.
   Como no conoce la equivalencia de estas medidas en centímetros, se puso a investigar y al hacer la conversión dedujo que el pantalón mide 71.12 cm de cintura y 76.2 cm de largo.
   - ¿Qué operación tuvo que hacer para realizar la conversión a centímetros?
   - ¿Cuántos centímetros equivalen a una pulgada?
   - ¿Cómo lo determinaste?

   Enrique y su mamá se dieron cuenta de que las pulgadas y otras unidades del Sistema Inglés (yarda, galón, onza, libra), se usan más de lo que pensaban.
2. Relacionen, con una flecha, cada objeto con la unidad del Sistema Inglés que se usa para medirlo.




Pulgadas Galones Libras Yardas Onzas

   - ¿Conoces las equivalencias de estas unidades en el SI? ¿Cuáles son?
   - ¿Conoces alguna otra medida del Sistema Inglés? ¿Para qué se usa?

Reúnete, en pareja, y comparen sus respuestas; encuentren otro caso en el que se mida con pulgadas y comenten sobre su uso.

- ¿Usan el Sistema Inglés más de lo que se imaginaban?, ¿qué tan importante es conocerlo y saberlo usar?

Investiguen en qué países se usa oficialmente el Sistema Inglés.

Descubro y construyo

**I. Conozco las unidades de longitud del Sistema Inglés y realizo equivalencias con las unidades del Sistema Internacional de Unidades.**

La unidad base de longitud del Sistema Inglés es el **pie**, que representa la longitud promedio del pie de un hombre anglosajón. Se abrevia como **ft** (de *foot*).

1. Comparen en grupo la medida de su pie derecho en pulgadas (in, abreviatura de inches, en inglés) y registren los datos obtenidos. Después trabajen en parejas.
   - ¿Encuentran mucha variación en los datos?
   - Si un pie equivale a 12 in, ¿el pie de alguno de sus compañeros mide un pie?
   - ¿A cuántos centímetros equivale un pie? ¿Cómo lo determinaron?

   Otra unidad de longitud del Sistema Inglés es la **yarda** (**yd**). Si tienen afición al futbol americano sabrán que el campo se divide en yardas.
   - Si una yarda mide 3 ft, ¿a cuántos centímetros equivale?
   - Si un campo de futbol americano mide 100 yd, ¿a cuántos metros equivale?

   La **milla** (**mi**) es otra de las unidades de longitud del Sistema Inglés y se usa para medir distancias largas, por ejemplo el recorrido de un automóvil: 100 millas equivalen a 160.9 km.
   - ¿A cuántos kilómetros equivale una milla?

2. A partir de lo anterior, completen las siguientes equivalencias:

   a. 1 pulgada (1 in) = _____ cm　　b. 1 pie (1 ft) = _______ cm
   c. 1 yarda (1 yd) = _____ cm = _____ m　　d. 1 milla = (1 mi) = _______ m = _____km

   - ¿Qué procedimiento permite pasar del SI al Sistema Inglés y viceversa?

3. Utiliza las conversiones entre unidades del Sistema Inglés para completar el siguiente cuadro de equivalencias:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ÷ 2.54 | ________ | ________ | ________ |
| (cm) (in) | (cm) (ft) | (m) (yd) | (km) (mi) |
| ________ | × 30.48 | × 0.914 | ________ |

   a. Determinen la longitud en metros de un velero de 25 ft.
   b. Calculen la estatura en metros de un jugador que mide 5 pies y 3 pulgadas.
   c. Calculen cuántos metros avanza un jugador si recorre 15 yardas.
   - ¿Qué distancia recorre un automóvil en millas en un trayecto de 50 km?

   Escriban su estatura en pies y pulgadas.

Comparen sus respuestas con otras parejas y encuentren ventajas y desventajas de las conversiones del Sistema Inglés al SI.

## II. Establezco equivalencias entre las unidades de capacidad del Sistema Inglés y del Sistema Internacional de Unidades para resolver problemas.

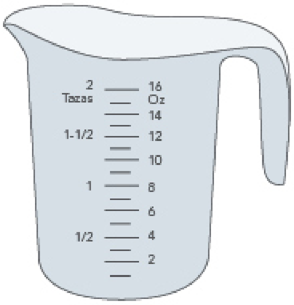
La unidad de capacidad base en el Sistema Inglés es la **onza líquida** ( **fL oz**, de *fluid ounce*), que equivale a 29.57 mL. Por ejemplo, una taza medidora, que llamaremos "c" por su nombre en inglés, "*cup*", equivale a 8 fL oz y un **galón** (**gal**) equivale a 16 tazas ( 16 c).

1. Completen, en parejas, las siguientes equivalencias a partir de la información anterior.

a. 1 fL oz = 29.57 mL
b. 1 L = ______ fL oz
c. 1 c = ____ fl oz = ______ mL
d. 1 L = ______ c
e. 1 gal = ______ tazas = ______ L
f. 1 L = ______ gal

- ¿Qué hicieron para completar las equivalencias?

2. Resuelvan los siguientes problemas de acuerdo con las equivalencias anteriores.




a. Si un bebé recién nacido toma 2 fL oz de leche cada cuatro horas, ¿qué cantidad de leche en mililitros toma en un día? Expliquen cómo obtuvieron la respuesta.
b. Juan se sirvió leche en una taza y quería saber cuál es su capacidad. Para ello, usó la taza medidora que se muestra a la izquierda:
   - ¿Cuál es la capacidad de la taza en mililitros? ¿Cómo lo supieron?
   - ¿Cuántas tazas iguales se pueden servir con un galón de leche? Ocho
c. La familia de Antonio viajó a Estados Unidos en automóvil para visitar a sus primos.
   Antonio pasó a una gasolinera y quiso ponerle 40 L, pero ahí despachan la gasolina por galones.
   - ¿Cuántos galones tuvo que pedir Antonio?
d. El señor Martínez va a pintar su casa y debe cubrir una superficie de 250 m². Si necesita aproximadamente 1 litro para 3 metros cuadrados y compró 3 cubetas de 8 galones, ¿cuánta pintura le sobrará? Escriban su respuesta en litros.
e. ¿Aproximadamente con cuántos galones se llena un tinaco de 750 L de capacidad?

**Utilizo las TIC**

En la siguiente liga podrás encontrar un convertidor de unidades entre los dos sistemas. Verifica con este recurso si los resultados de sus conversiones fueron correctos.

cmed.mx/m246

3. Realicen las siguientes conversiones sin el uso de calculadora:

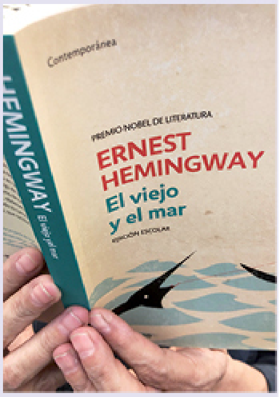
a. $\frac{1}{2}$ gal = _______ oz
b. 1 gal = _______ fL oz
c. 32 fL oz = _______ gal
d. 192 fL oz = _______ gal

Reúnanse con otras parejas y comparen sus respuestas. Si varían en decimales, acuerden sus conversiones. Comenten sobre cuál de estas unidades han utilizado y si este ejercicio les ayudó a entender mejor cómo usar el Sistema Inglés. Investiguen sobre otras unidades de capacidad del Sistema Inglés.

### III. Resuelvo problemas de conversión entre las unidades de masa del Sistema Inglés y del SI.

El siguiente fragmento pertenece al libro de *El viejo y el mar* del novelista estadounidense Ernest Hemingway (1899-1961).

–Era la única manera de matarlo –dijo el viejo. […] "Tal como está, pesa mil quinientas libras –pensó–. Quizá más. […] ¿Si quedaran en limpio dos tercios de eso, a treinta centavos la libra?"
El viejo miraba al pez […]. Pasó una hora antes de que le acometiera el primer tiburón.
[…] –Se llevó unas cuarenta libras –dijo el viejo en voz alta. "Se llevó también mi arpón y todo el cabo –pensó– y ahora mi pez sangra y vendrán otros tiburones."
No le agradaba ya mirar al pez porque había sido mutilado. Cuando el pez había sido atacado fue como si lo hubiera sido él mismo.
"Pero he matado el tiburón que atacó a mi pez –pensó–. Y era el dentuso más grande que había visto jamás. […] Un hombre puede ser destruido, pero no derrotado."




1. Resuelve a partir del texto anterior.
   La **libra** (**lb**) es una unidad de masa del Sistema Inglés que equivale a 454 g.
   - ¿A cuántos kilogramos equivale el trozo de pez que se llevó el tiburón? Describe cómo obtuviste la respuesta.
   - La masa de un tiburón blanco llega a ser de hasta 2 500 lb; determina su masa en kg.

   La **onza** es una medida menor que la libra, se abrevia **oz** y se distingue de la onza liquida por el contexto. Su equivalencia en el SI es de 28.35 g.
   Así, 1 lb tiene _____ oz.
2. Utiliza la información anterior para completar las conversiones. Escribe las operaciones para completar las equivalencias.
   a. 1 lb = 1 × 454 = ______ g
   b. 1 kg = 1 ÷ 0.454 = ___________ lb
   c. 2 oz = 2 × ______ = ______ g
   d. 1 g = 1÷ 28.35 = ___________ fl oz
   e. 1 000 lb = ________ = _______ kg
   f. 150 oz = __________ = ______ kg
3. Una pelota de beisbol tiene una circunferencia máxima de 9 pulgadas y una masa de 5.25 onzas en promedio. Escriban sus dimensiones en centímetros y gramos.

Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Discutan y analicen. ¿Por qué es más fácil manejar fracciones cuando se usan unidades del Sistema Inglés?

**Utilizo las TIC**

En la historia de las unidades de medida hay datos curiosos; puedes conocer algunos en el siguiente blog.
cmed.mx/m247

**Practico**

Completa las siguientes conversiones.

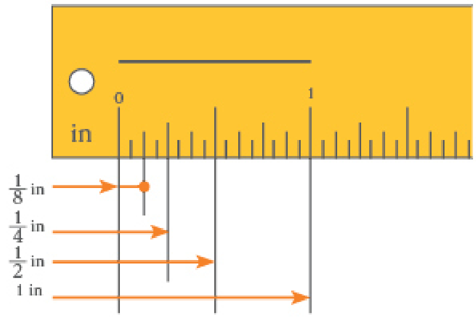
a. $\frac{1}{2}$ lb = ___ oz = _______ g
b. 750 lb = _______ kg
c. 30 oz = _______ lb= _______ kg
d. 13767 mg = _______ oz
e. 25.3 kg = _______ lb
f. 378 g = _______ lb

## IV. Conozco fracciones de las unidades del Sistema Inglés y su uso cotidiano.

Las unidades del Sistema Inglés no suelen dividirse en décimos o centésimos, como las unidades del Sistema Internacional. Para describir sus submúltiplos se utilizan fracciones o decimales.

Por ejemplo, los submúltiplos de una pulgada en fracción y en decimal se muestran en la tabla y gráficamente en la regla:

| Fracción (in) | Decimal (in) |
|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 0.5 |
| $\frac{1}{4}$ | 0.25 |
| $\frac{1}{8}$ | 0.125 |
| $\frac{1}{16}$ | 0.0625 |
| $\frac{1}{32}$ | 0.03125 |
| $\frac{1}{64}$ | 0.015625 |




1. Encuentra las equivalencias en decimal y como fracción de las siguientes expresiones:

   a. $\frac{1}{2}'' + \frac{3}{8}'' + 2'' =$ ______ in = ______ in    b. $4\frac{5}{8}'' =$ ______ in

   c. $\frac{3}{8}'' + \frac{3}{4}'' =$ ______ in = ______ in    d. $\frac{9}{16}'' + \frac{5}{8}'' =$ ______ in = ______ in

2. Para convertir unidades de masa y capacidad a unidades del Sistema Inglés se procede de la misma manera que con las unidades del SI.
   - ¿Cuántas pulgadas hay en medio pie?
   - Existe una clasificación para los caballos "Cuarto de Milla", ¿a qué medida en kilómetros equivale dicha expresión? Investiga a qué se refiere el nombre.

   Determina cuántas onzas hay en $\frac{3}{4}$ de libra.
   - En los mercados de Estados Unidos la carne se vende en libras. Si el costo del bistec es de 3.25 dólares la libra, ¿cuál es el costo de dos libras y cuarto?
   - El precio promedio de la gasolina en Estados Unidos es de 3.07 dólares por galón, ¿cuál es el costo de $7\frac{3}{16}$ gal?
   - En México la gasolina Magna se vende en un promedio de \$18.00 el litro. ¿Cuánto se paga por $8\frac{1}{2}$ gal de gasolina?

3. Resuelve las siguientes operaciones y escribe en la unidad más pequeña.

   a. $\frac{1}{2}$ pie + 0.375 pies + 4″ = ______________________________
   b. $4\frac{3}{8}$ lb + 8 oz = ______________________________
   c. 14 fl oz + 3.25 gal = ______________________________

**Utilizo las TIC**

En este sitio: cmed.mx/m248, podrás practicar y observar algunas conversiones entre las unidades del Sistema Inglés y el SI.

¡Explora, aprende y prueba!

Entra a internet y busca un "servidor de aplicaciones de mapas" que te permita fijar una ubicación y seleccionar un punto de destino. Elige "medir distancia" y observa las unidades de medida que aparecen.

## V. Conversión de unidades combinadas con factores de conversión de los dos sistemas de medida.

Trabaja, en pareja, y resuelvan.

1. La receta para hacer la masa de las crepas lleva $2\frac{1}{2}$ libras de harina, $\frac{1}{4}$ de galón de leche y 2 onzas de mantequilla derretida para hacer 12 crepas de 8 pulgadas de diámetro.
   Conviertan la receta a kilogramo de harina, litros de leche y mililitro de mantequilla, y calculen el tamaño de las crepas dando su longitud en centímetros.
   Harina: ______________ Leche: ______________
   Mantequilla derretida: ______________ Diámetro: ______________

2. Un automóvil híbrido recorre 65 millas por galón de combustible.
   - Describan qué debe hacerse para convertir el rendimiento de combustible del automóvil a $\frac{\text{km}}{\text{L}}$.
   - Completen la conversión utilizando los factores necesarios.

$$65\ \frac{\text{mi}}{\text{gal}} \times \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3. Un velocista corre en promedio a $12.5\ \frac{\text{yd}}{\text{s}}$; ¿cuántos metros recorre en un minuto?

$$12.5\ \frac{\text{yd}}{\text{s}} = 12.5\ \_\_\_\_\_\_ \times \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4. La regadera del baño de la familia de Laura tiene un flujo de 4 galones por minuto. Calculen el flujo en litros por minuto.

$$4\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} = 4\ \frac{\_\_\_\_}{} \times \frac{\_\_\_\_\_\_\ \text{L}}{\text{gal}} = \_\_\_\_\ \frac{\text{L}}{\text{min}}$$

   - Si Laura mantiene la regadera abierta durante 7.5 min mientras se baña, ¿cuántos litros de agua utiliza?
   - Se dice que un baño con cuidado responsable del agua es de 130 L. ¿Laura cuida el agua al bañarse?

5. La velocidad de la luz es de 1 080 000 000 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; calculen su equivalente en $\frac{\text{mi}}{\text{s}}$.

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{\_\_\_\_\_\_}{\text{s}} \times \frac{\_\_\_\_\_\_}{\text{km}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\ \frac{\text{mi}}{\text{s}}$$

   - ¿Cuál es la velocidad de la luz en $\frac{\text{km}}{\text{s}}$? Verifica que la cantidad anterior coincida con esta respuesta.

6. Realiza las siguientes conversiones:
   a. $8.53\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} = \_\_\_\_\_\_\ \frac{\text{L}}{\text{s}}$ b. $5.71\ \frac{\text{yd}}{\text{s}} = \_\_\_\_\_\_\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$ c. $3.24\ \frac{\text{cm}}{\text{s}} = \_\_\_\_\_\_\ \frac{\text{in}}{\text{s}}$

Reúnanse con otra pareja, comparen sus respuestas y reflexionen sobre lo que han aprendido acerca del Sistema Inglés. Comenten en grupo sobre las unidades de este sistema y su uso en la vida cotidiana.

## Recapitulo

1. Las unidades básicas de medida del **SI** son: el metro (m) para longitudes, el litro (L) para capacidades y el kilogramo (kg) para la masa.
2. El peso (*P*) es la fuerza con que la Tierra atrae un cuerpo ($P = mg$). La masa no varía pero el peso sí, porque depende de la fuerza de gravedad (*g*). Las unidades de peso son Newtons (N).
3. Las unidades del **SI** tienen múltiplos y submúltiplos. Para pasar de una unidad mayor a una menor, se multiplica por 10 tantas veces como lugares haya entre las unidades correspondientes, mientras que si es de una unidad menor a una mayor se divide entre 10.
4. Las unidades del **SI** tienen múltiplos y submúltiplos. Para pasar de una unidad mayor a una menor, se multiplica por 10 tantas veces como lugares haya entre las unidades correspondientes, mientras que si es de una unidad menor a una mayor se divide entre 10.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Completa las siguientes equivalencias.

**a.** 1 in = ________ cm

**b.** 1 ft = ________ cm

**c.** 1 yd = ________ m = ________ cm

**d.** 1 mi = ________ m

**e.** 1 fl oz = ________ mL

**f.** 1 gal = ________ L

**g.** 1 oz = ________ g

**h.** 1 lb = ________ g = ________ kg

**2.** Completa la tabla de unidades escribiendo su abreviatura y la conversión correspondiente:

| Unidad | Abreviatura | Equivalencia |
|---|---|---|
| Decalitro | | ____________ gal |
| Metro | | ____________ in |
| Yarda | | ____________ cm |
| Onza | | ____________ cg |
| Hectogramo | | ____________ lb |
| Galón | | ____________ cL |

**3.** Realiza las siguientes conversiones.

**a.** 5.3 L = _______ cL

**b.** 248 m= _______ hm

**c.** 9586 cg = _______ kg

**d.** 125 mg = _______ dag

**e.** 1500 mL = _______ dL

**f.** 0.2342 km = ____cm

**g.** 2.4 ft = _______ in

**h.** $\frac{1}{2}$ gal = _______ fl oz

**i.** 5 lb = _______ oz

**4.** Resuelve los problemas.

**a.** Se quiere llenar 25 frascos con 80 mL de un nuevo repelente de mosquitos. ¿Cuántos litros se necesitarán?

**b.** Enrique se está preparando para un maratón. Si en su entrenamiento corrió 25 mi, ¿cuántos metros más tiene que correr para alcanzar los 42.195 km?

**c.** Regularmente la longitud de los barcos se mide en pies. Si un barco mide 850 pies de largo, ¿cuál es su longitud en metros?

**5.** Ordena las siguientes cantidades de mayor a menor.

| $3\ \frac{m}{s}$ | $450\ \frac{m}{min}$ | $10\ \frac{mi}{h}$ | $257\ \frac{in}{s}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**a.** Convierte $37\ \frac{kg\,m}{h}$ a $\frac{g\,cm}{s}$.

$37\ \frac{kg\,m}{h} = \_\_\_\_\_\_ \frac{g\,cm}{s}$

**b.** Utiliza factores de conversión y escribe la equivalencia de $25\ \frac{lb}{in}$ a $\frac{kg}{cm}$.

$25\ \frac{lb}{in} = \_\_\_\_\_\_ \frac{kg}{cm}$

**c.** La fuerza de gravedad en la Luna es de $1.6\ \frac{m}{s^2}$; escribe su equivalente en $\frac{km}{min^2}$

$1.6\ \frac{m}{s^2} = \_\_\_\_\_\_ \frac{kg}{min^2}$

# Logro ir **más allá**

La medición es una práctica común y esencial del ser humano en todas las culturas; implica también la necesidad de sistematizar y estandarizar los sistemas de medida, tarea nada fácil.

El Sistema Internacional de Unidades (SI) completó sus acuerdos en 1971 y sigue en constante análisis para definir los patrones de medida de acuerdo con el avance de la ciencia.

Detalle del *Códice Mendoza* en el que aparece un **tameme** caminando detrás de un guerrero.

En el México prehispánico, una gran cantidad de culturas y pueblos diferentes tuvieron la necesidad de definir sus patrones de medida para comerciar, muchos de los cuales, como en toda la historia de la humanidad, se basaban en las medidas del cuerpo humano y sus capacidades.

En el imperio mexica los *pochtecas* eran los responsables de los intercambios comerciales con sus vecinos. A lo largo del tiempo, la preocupación común ha sido siempre salvaguardar los principios del intercambio justo.

La unidad de medida mexica para la masa era el **tlameme**, término náhuatl, que equivale a la carga que un hombre podía soportar en una determinada jornada. La masa se colocaba en el *cacaxtli* (rejilla de madera que se ataba a la espalda), y la carga se aproximaba a los 23 kg. Otra unidad equivalente para una carga de cacao era de tres *xiquipilli* (24 000 granos). Otras unidades prehispánicas son el *centlachipinilli*, que significa "una gota de algo" y se medía con el *cempopolli*, que corresponde a la cantidad de líquido que puede absorber una bola de algodón del tamaño de medio huevo. Para medir productos secos utilizaban el *centlaolololli*, que corresponde a la porción de masa para elaborar una tortilla. Con el *acalli* y el *cuauhacortontli* median líquidos y sólidos; equivalían a 27.26 litros y 4.54 litros respectivamente. Otras medidas de capacidad para líquidos y sólidos siguen usándose en muchas comunidades de México, como son los "cestos", "cajetes", "cucharas", "sardinas", "cuartas", "cuartillos", etcétera.

Fuente: http://www.historicas.unam.mx/publicaciones/revistas/nahuatl/pdf/ecn10/134.pdf (editado)

## GLOSARIO

**Tameme.** Persona que tiene por oficio conducir cargas. La palabra procede del náhuatl, *Tlamama*, cargar.

Realiza las siguientes conversiones:

- 8 *tlamemes* = _______ kg = ___________ granos de cacao.
- 184 725 ml = _______ *cuauhacortontli*
- 267 233 granos de cacao = _______ kg

# Histogramas y polígonos de frecuencia

L19

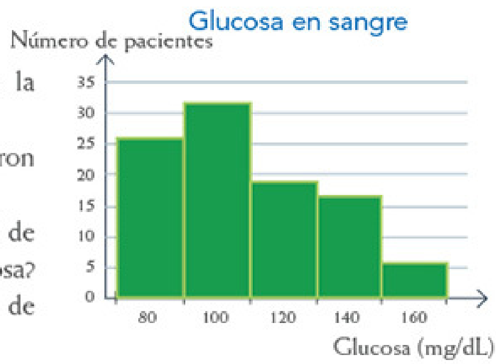
**Exploro** Interpreto la información de tablas y su representación gráfica.

La diabetes es la enfermedad que, año con año, cobra más vidas en México; según el INEGI, en 2015 fue la causa del 15% de los fallecimientos. Por esta razón, la Secretaría de Educación Pública y la Secretaría de Salud han implementado programas y normas alimentarias en las escuelas.

La glucosa es una sustancia necesaria para la función celular; niveles altos o bajos de ella puede tener un efecto adverso en el cuerpo. Mantener los niveles normales de glucosa en la sangre es esencial para controlar la diabetes; los niveles normales están entre 70-110 mg/dL en ayunas.

En una clínica de la Ciudad de México se hizo un análisis a todos los pacientes; se promediaron los resultados y se presentaron en la siguiente gráfica de barras. Analiza la gráfica de barras y responde:

- ¿A cuántos pacientes analizaron en la clínica?
- ¿En qué nivel de glucosa se detectaron más pacientes?
- En general, ¿cómo evaluarías la salud de los pacientes respecto al nivel de glucosa?
- ¿Cuántos pacientes tuvieron menos de 120 $\frac{mg}{dL}$ de glucosa?




Un año después, se registraron los resultados de los pacientes en la tabla de la derecha.

- ¿Cuál es el rango del primer grupo?
- ¿Todos los grupos tienen el mismo rango?
- ¿En qué grupo hubo más pacientes?
- ¿Qué recurso consideras adecuado para representar la información gráficamente? Explica por qué.

| Glucosa mg/dL | Número de pacientes |
|---|---|
| 71-90.5 | 31 |
| 91-110.5 | 25 |
| 111-130.5 | 12 |
| 131-150.5 | 18 |
| 151-170.5 | 3 |

Comenta tu última respuesta con otros integrantes del grupo. Discutan si una gráfica de barras sería adecuada para registrar la información de la tabla. Reflexiona: ¿te parece más sencillo analizar muchos datos cuando están agrupados o cuando están dispersos? ¿Qué ventajas tiene presentar información agrupada por intervalos? ¿En qué casos agruparías información de esta forma?

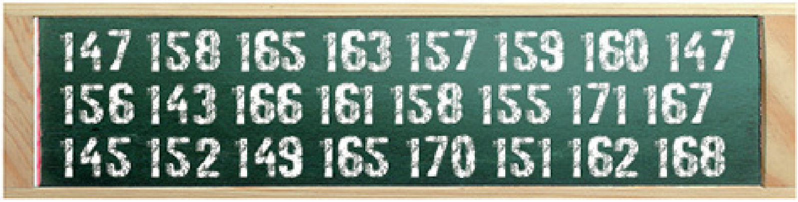
**Leo +**

En esta liga podrás conocer algunas de las enfermedades causadas por los hábitos alimentarios. Estar informado es importante para saber si necesitas ayuda. Comparte tus dudas o temores con tus compañeros y escucha siempre con respeto a los demás. Busquen el apoyo del maestro cuando lo necesiten. http://www.fundacionunam.org.mx/salud/malos-habitos-alimenticios/

Descubro y construyo

## I. Interpreto información que se presenta en tablas de datos agrupados por intervalos e identifico la representación más adecuada.

El maestro pidió a sus alumnos medir su estatura en centímetros. Los resultados se anotaron en el pizarrón:




- Existe alguna regularidad en los datos?, ¿podrías decir algo respecto a su frecuencia?

Determina el **rango** de las estaturas.

- ¿Qué dificultad habría si los datos se presentaran uno por uno en una tabla o en una gráfica?

Después, el profesor les pidió organizar la información en tablas de datos y para ello formó cuatro equipos. Cada equipo organizó la información como se muestra.

1. Completa las tablas de cada quipo:

| Equipo 1 | |
|---|---|
| Intervalo | Frecuencia |
| 140-150 | |
| 150-160 | |
| 160-170 | |
| 170-180 | |

| Equipo 2 | |
|---|---|
| Intervalo | Frecuencia |
| 135-155 | |
| 156-166 | |
| 165-185 | |

| Equipo 3 | |
|---|---|
| Intervalo | Frecuencia |
| 143-145 | |
| 146-148 | |
| 149-151 | |
| 152-154 | |
| 155-157 | |
| 158-160 | |
| 161-163 | |
| 164-166 | |
| 167-169 | |
| 170-172 | |

| Equipo 4 | |
|---|---|
| Intervalo | Frecuencia |
| 140-144 | |
| 145-149 | |
| 150-154 | |
| 155-159 | |
| 160-164 | |
| 165-169 | |
| 170-175 | |

- ¿Qué intervalo utilizó cada equipo?
- ¿Qué dificultades observas en la representación del equipo 1?
- ¿Qué representación te parece más adecuada? Explica la razón.
- ¿Para qué piensas que sirva agrupar los datos por intervalos?

Compara, en pareja, tus respuestas y propongan una agrupación diferente; discutan sobre la distribución de estaturas y su **dispersión**. ¿Qué características deben tener los intervalos al agrupar los datos? ¿Por qué es útil esta forma de registrar la información?

### Tomo Nota

Un **intervalo** es igual al conjunto de números que están entre dos valores dados. Un intervalo **semiabierto** a la derecha se representa como $[m, n)$ y contiene todos los valores iguales o mayores que $m$ y los menores que $n$, y uno semiabierto a la izquierda, $(m, n]$, contiene los números mayores que m y menores o iguales que $n$. Es decir, el intervalo semiabierto $[3, 5)$ contiene todos los valores iguales o mayores que ___ ty menores que ___.
El intervalo semiabierto a la izquierda, por ejemplo $(3, 5]$, contiene todos los valores ______________ que 3 y menores o iguales que ________.

### GLOSARIO

**Rango.** Diferencia entre el mayor y el menor valor de un conjunto de datos estadísticos.
**Dispersión.** En estadística, indica qué tanto varía un conjunto de datos, es decir, qué tan alejados están unos datos de otros o de un valor de referencia.

## II. Recopilo, agrupo y organizo datos por intervalos o clases para construir tablas de frecuencias.

Reúnanse en equipos de tres o cuatro miembros y trabajen en la siguiente actividad:

1. En grupo, obtengan el tiempo en minutos que, en promedio, dedican a las redes sociales todos los integrantes del grupo, incluidos los de su equipo. Enlisten los tiempos en el siguiente espacio:

Analicen la lista y escriban:

### Tomo Nota

Un **histograma** es una gráfica de barras que permite representar valores continuos, agrupados en intervalos llamados intervalos de clase. Las barras tienen el ancho de cada intervalo (por eso las barras van pegadas) y su altura es igual a la frecuencia correspondiente.

- Valor mínimo: ________ Valor máximo: ________ Rango:________
- Registren la información agrupada por intervalos de clase de la siguiente forma: Establezcan cinco intervalos del mismo tamaño; para ello, dividan el rango entre el número de intervalos. Por ejemplo, si el rango es de 200 min – 30 min = 170 min, entonces $\frac{170}{5} = 34$; eso significa que cada intervalo debe ser de 34 min.
- Para formar los intervalos consideren lo siguiente: En el primer intervalo, agrupen todos los datos iguales o mayores que el valor mínimo y menores que el valor máximo. Por ejemplo, si el valor mínimo es de 30 min y el tamaño del intervalo de clase es de 34 min, el primer intervalo sería [30-64), que considera todos los valores iguales o mayores que 30 y menores que 64; el siguiente sería [64-98). Y el proceso se repite hasta completar todos los intervalos de clase. El último intervalo es cerrado, para incluir el dato de valor máximo.

| Intervalo de clase (min) | Frecuencia |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

2. Completen la tabla de la izquierda a partir de la información anterior, en datos agrupados por intervalos. Después, construyan el histograma correspondiente. Consideren que las barras van pegadas y que los límites de cada una corresponden a los límites de cada intervalo. intervalo. Incluyan el título del gráfico y el nombre de las variables en los ejes, con sus unidades.
   - ¿Cuál es el intervalo donde el número de alumnos es más frecuente?
   - ¿Cuál es el intervalo donde el número de alumnos es menos frecuente?
   - ¿Cómo consideran que es el uso de las redes sociales en su grupo?
   - ¿En qué intervalo de clase se encuentra el tiempo promedio?
   - ¿Por qué en un histograma las barras van pegadas?

Comparen su registro con los de otros equipos. Encuentren las ventajas de analizar una tabla de frecuencia de datos agrupados por intervalos y su representación en un histograma. Discutan las diferencias y similitudes entre un histograma y una gráfica de barras.

## III. Construyo histogramas a partir de una tabla de frecuencia de datos agrupados e interpreto la información a partir de la distribución de las barras.

La siguiente lista muestra la masa, en gramos, de los pescados que sacaron en un día de trabajo los integrantes de una cooperativa del pueblo de La Cruz de Huanacaxtle, Nayarit.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 320 | 391 | 239 | 336 | 212 | 290 | 292 | 464 | 271 |
| 284 | 339 | 445 | 204 | 466 | 359 | 239 | 468 | 477 |
| 271 | 492 | 369 | 384 | 425 | 465 | 352 | 429 | 397 |
| 492 | 251 | 381 | 489 | 346 | 423 | 407 | 244 | 348 |

- ¿Cuál es la media de la masa de todos los pescados?

1. En parejas, calculen los siguientes valores a partir de la tabla anterior:
   Masa mínima: _______ Masa máxima: _______ Rango: _______

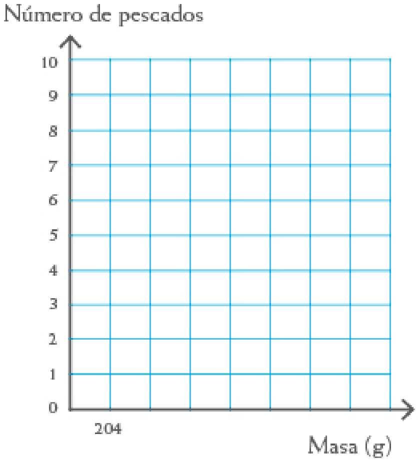
2. Ordenen los datos de menor a mayor, escriban en la tabla los intervalos de clase semiabiertos a la derecha y calculen la frecuencia de cada uno. La **marca de clase** es el punto medio de cada intervalo o el promedio de los valores extremos.

| Clase | Intervalo de clase [m, n) (g) | Frecuencia | Marca de clase (g) |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |

- ¿En qué intervalo de clase hay más pescados?
- ¿Qué tan dispersas consideran las masas de los pescados? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuántos pescados tienen menos de 301 g?
- ¿Cuántos pescados tienen 348 g o más?

3. Construyan el histograma que represente la información de la tabla.
   - De acuerdo con los valores máximo y mínimo y comparados con la media de las masas, ¿cómo se pueden interpretar los datos a partir del histograma?

Número de pescados por masa (kg)




### Tomo Nota

Si las barras de mayor altura se acumulan del lado derecho, se dice que el histograma está **sesgado** hacia la derecha. Si las barras de mayor altura se acumulan del lado izquierdo, se dice que el histograma está sesgado hacia la izquierda. Se dice que es simétrico si las alturas de las barras se comportan del mismo modo a la derecha que a la izquierda a partir del centro del eje horizontal.

### Glosario

**Sesgar.** Hace referencia a torcer o hacer algo oblicuo hacia uno de sus lados.

### Utilizo las TIC

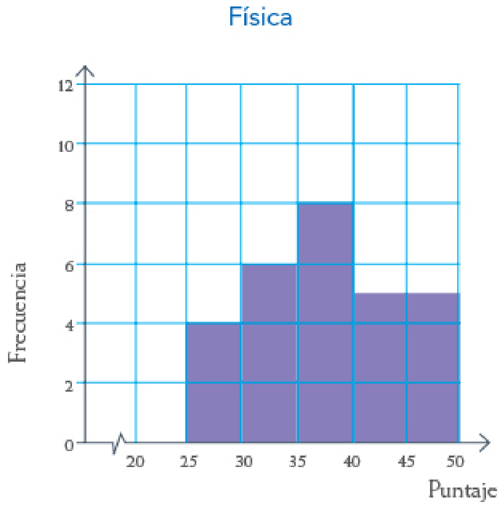
En la siguiente liga puedes ver paso a paso, en un video, cómo "Crear un histograma". cmed.mx/m250

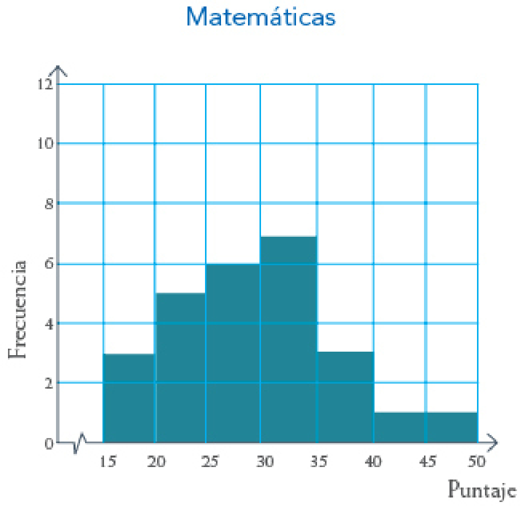
Si quieres seguir practicando, selecciona "Práctica: Crea histogramas" y resuelve los 4 problemas. Es importante que compruebes tu respuesta para reafirmar lo que has aprendido.

## IV. Interpreto la información presentada en un histograma.

Los siguientes histogramas representan los resultados de un grupo de alumnos en un examen de 50 reactivos de dos asignaturas:

1. Completen, en parejas, las tablas a partir de la información de los histogramas. Consideren intervalos semiabiertos a la derecha.




| Clase | Intervalo de clase (puntos) | Marca de clase (puntos) | Frecuencia |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |

| Clase | Intervalo de clase (puntos) | Marca de clase (puntos) | Frecuencia |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |

**Utilizo las TIC**

En la siguiente liga podrás conocer, a través de un ejemplo, más herramientas para analizar la información que se presenta en un histograma.
cmed.mx/m251

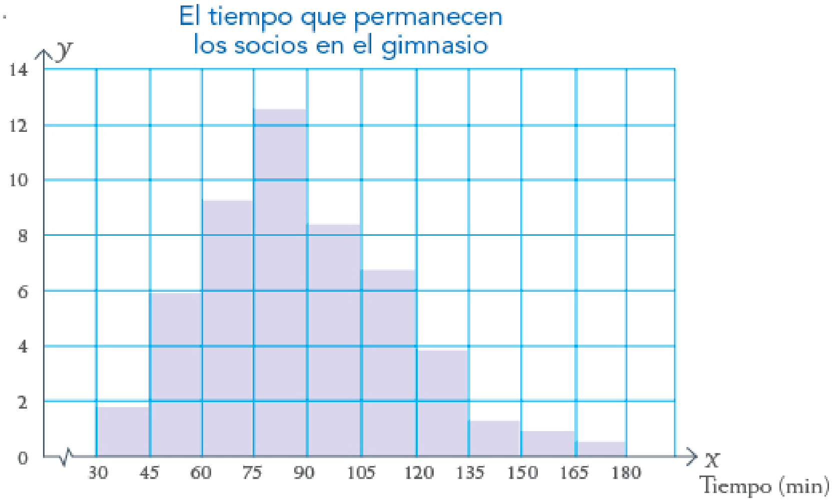
- ¿Qué similitudes y diferencias observan en los histogramas?
- ¿Qué características o qué tipo de histograma representan?
- ¿En qué asignatura consideran que el grupo tuvo mejor rendimiento? Justifiquen su respuesta con base en el histograma.
- ¿Qué podrías decir sobre las asignaturas según su sesgo?

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas; ¿para qué otra situación tomarían decisiones a partir de un histograma? Comenten con otra pareja y en grupo, dirigidos por el maestro, y hagan una lista de ejemplos, identificando las variables por analizar.

## V. Construyo polígonos de frecuencia a partir del histograma y comparo información dada en polígonos de frecuencias.

Analicen la información y resuelvan las actividades en parejas.

1. El siguiente histograma muestra los resultados de un estudio que hizo el director de un club deportivo sobre el tiempo, en minutos, que los socios permanecen en el gimnasio.




a. Completen la tabla a partir de los resultados que muestra el histograma.

| Clase | Intervalo (min) | Marca de clase (min) | Frecuencia |
|---|---|---|---|
| 1 | [30, 45) | 37.5 | |
| 2 | [45, 60) | | |
| 3 | [60, 75) | | |
| 4 | [75, 90) | | |
| 5 | [90, 105) | | |
| 6 | [105, 120) | | |
| 7 | [120, 135) | | |
| 8 | [145, 150) | | |
| 9 | [150, 165) | | |
| 10 | [165, 180] | | |

b. Ahora, ubiquen la marca de clase o punto medio de cada barra y coloquen un punto en la parte superior, en cada caso. Después, iniciando en el eje $x$, unan con segmentos de recta los puntos medios o marca de clase de cada intervalo, hasta regresar al eje $x$.

El polígono que trazaron es una gráfica llamada **polígono de frecuencias**.

- ¿Qué diferencias observan entre el polígono de frecuencias y el histograma?
- Analiza el histograma y la forma del polígono de frecuencias. ¿Qué características tiene la representación gráfica?
- ¿Qué conclusiones puede obtener el director del club?
- Si la marca de clase es el valor representativo de cada intervalo, ¿cuántos valores son mayores que la moda?

### Tomo Nota

**Polígono de frecuencias**, es el nombre que recibe una clase de gráfico que se crea a partir de un histograma de frecuencia. Se obtiene uniendo los puntos medios, en su parte más alta, de las barras del diagrama.

**Utilizo las TIC**

En *Geogebra* existen herramientas para construir tablas de frecuencias, histogramas y polígonos de frecuencia. Abre la vista de hoja de cálculo para escribir datos; crea listas y utiliza las herramientas estadísticas.
En la siguiente liga verás paso a paso cómo representar datos, de manera gráfica, en una hoja de cálculo.
cmed.mx/m252

2. El dueño de un restaurante quiere saber la edad de los clientes que asisten a comer, para implementar cambios en el menú. Durante una semana preguntó y registró las edades de sus clientes; la lista de edades fue la siguiente:

35, 6, 36, 23, 24, 20, 15, 19, 6, 34, 32, 33, 5, 37, 38, 43, 56, 35, 6, 7, 33, 26, 28, 61, 27, 36, 8, 25, 31, 30, 12, 23, 25, 27, 31, 34, 27, 26, 7, 56, 37, 38

Determinen el rango de edades de los clientes.

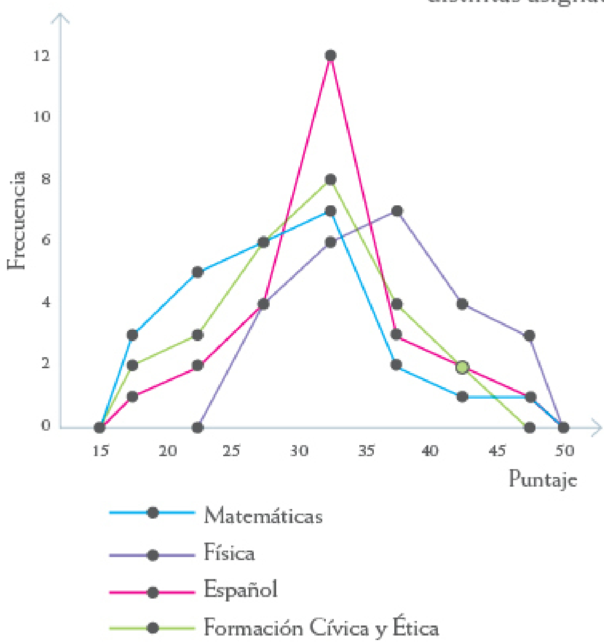
- ¿Cuántos clientes entraron esa semana?

Completen la tabla. Después, construyan el histograma y el polígono de frecuencias.

| Intervalo | Frecuencia | Marca de clase (años) |
|---|---|---|
| [0, 10) | | |
| [10, 20) | | |
| [20, 30) | | |
| [30, 40) | | |
| [40, 50) | | |
| [50, 60) | | |
| [60, 70] | | |


- De acuerdo con la información, ¿qué grupo de edades va más al restaurante?
- ¿Qué podrías decir de la distribución de clientes por edad a partir del polígono de frecuencias?
- ¿Por qué es importante para el dueño tener esta información?

3. Los siguientes polígonos de frecuencias muestran los resultados de un examen de distintas asignaturas, aplicados al mismo número de alumnos.




- ¿Qué características tiene cada polígono de frecuencias?
- En este caso, ¿por qué es mejor representar la información en un polígono de frecuencias y no en histogramas?
- ¿En qué asignatura consideras que tuvieron mejor rendimiento? Explica por qué.
- ¿En qué asignatura el rendimiento general fue más bajo? ¿Cómo se aprecia lo anterior en el polígono.
- ¿Cuáles son sus conclusiones acerca de los resultados de los exámenes con base en los polígonos de frecuencias?

Comparen sus observaciones con otros compañeros y escriban en grupo sus conclusiones sobre la utilidad de tener el polígono de frecuencias y su relación con la dispersión de los datos, los sesgos o la simetría para su análisis. Escriban sus conclusiones sobre las ventajas de registrar información en polígonos de frecuencias para compararlos.

**Practico**

1. Construye los histogramas de las siguientes tablas de frecuencia y el polígono de frecuencias correspondiente.

Tabla 1

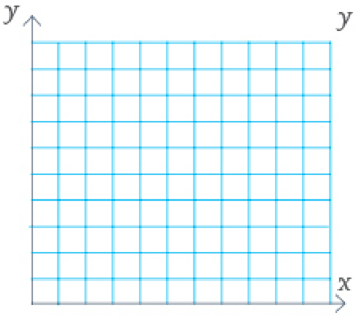
| Intervalos | Frecuencia |
|---|---|
| 1 – 3 | 4 |
| 3 – 5 | 8 |
| 5 – 7 | 12 |
| 7 – 9 | 7 |
| 9 - 11 | 3 |

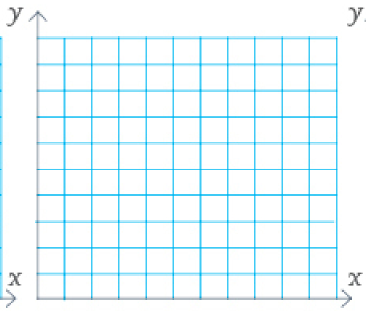
Tabla 2

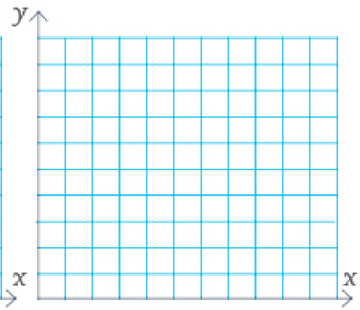
| Intervalos | Frecuencia |
|---|---|
| 30 – 40 | 75 |
| 40 – 50 | 130 |
| 50 – 60 | 40 |
| 60 – 70 | 100 |
| 70 – 80 | 50 |
| 80 - 90 | 82 |

Tabla 3

| Intervalos | Frecuencia |
|---|---|
| 13 – 18 | 87 |
| 18 – 13 | 98 |
| 23 – 28 | 135 |
| 28 – 33 | 57 |
| 33 – 28 | 30 |



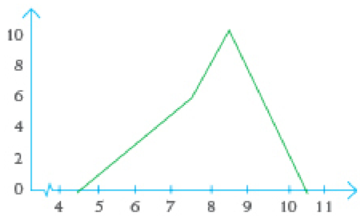




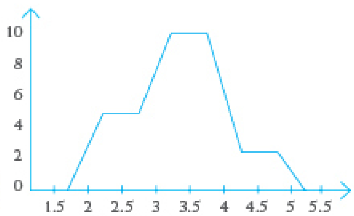

- Con base en los histogramas, ¿qué se podría decir sobre la distribución de los datos?
- Elige un histograma y escribe una situación que pueda representarse con la información.

2. Realiza en tu grupo una encuesta que represente valores continuos que puedan agruparse por intervalos. Ordena la información y construye el polígono de frecuencias en tu cuaderno.
   - Determina algún argumento de acuerdo con la forma del polígono; si tiene algún sesgo, ¿qué indica?

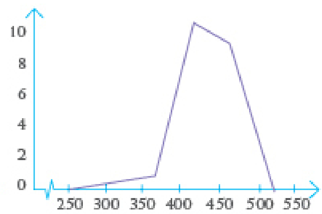
3. Relaciona cada polígono de frecuencias con la frase que describe.



(   )



(   )



(   )

   a. La mayoría de los niños que van al kínder tienen entre 3 y 4 años.
   b. Este año casi todas mis reses engordaron, muchas alcanzaron más de 400 kg.
   c. Pocos amigos obtuvieron 5 puntos en el juego, pero también pocos amigos obtuvieron 10.

L20

# Representación de información en gráficas de línea

Exploro

**Interpreto la información de una variable en un lapso de tiempo y la represento gráficamente.**

"La mitad de las especies de plantas y animales, en peligro por el cambio climático en los espacios naturales más importantes del mundo."

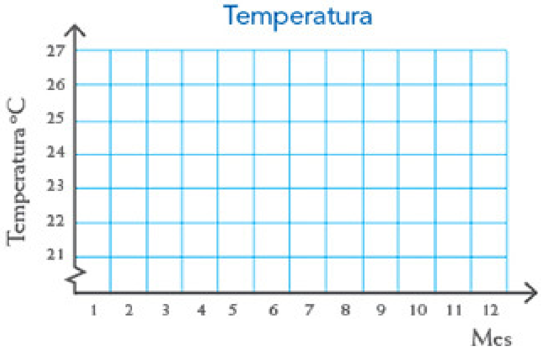
Fuente: Gerardo Tena, Noticias WWF, en www.wwf.org.mx

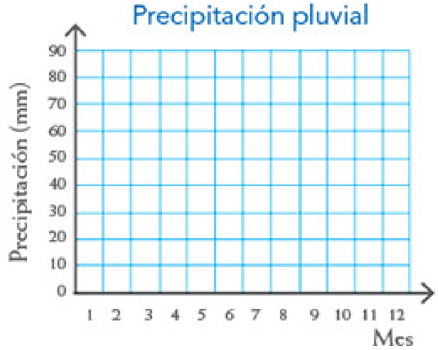
La tabla muestra la temperatura y los milímetros de lluvia promedio en la selva amazónica a lo largo de un año.

| Mes | Ene | Feb | Mzo | Abr | May | Jun | Jul | Ago | Sep | Oct | Nov | Dic |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura media (C°) | 26.5 | 26.8 | 27.1 | 27 | 26.3 | 24.8 | 24.2 | 23.5 | 23.9 | 24.2 | 24.7 | 25 |
| Precipitación pluvial (mm) | 56 | 77 | 85 | 52 | 13 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 | 3 | 7 |

Fuente: https://es.climate-data.org/location/719674/

Traza las gráficas de línea que muestren las temperaturas y la precipitación pluvial de la tabla.



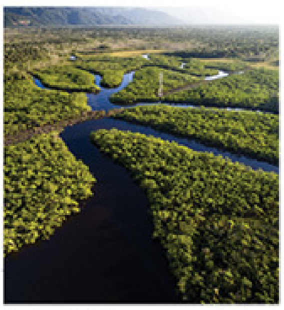




- ¿En qué mes se registra la temperatura más baja?
- ¿Cuál fue el rango de la temperatura a lo largo del año?
- ¿En qué mes el promedio de la temperatura fue mayor?
- ¿En qué mes llueve más?
- ¿Qué relación encuentras entre la temperatura y la precipitación?
- ¿Qué podrías decir del clima en la selva amazónica?

Reúnete en equipo y comparen sus respuestas. Reflexionen cómo, a partir de una gráfica, es posible conocer y explicar un fenómeno. Discutan cómo influye, en los meses que más llueve, que la selva del Amazonas se encuentre en el hemisferio sur de la Tierra.

Leo +

Entra a esta liga, donde podrás leer sobre el calentamiento global y cómo afecta a las especies, qué es el acuerdo de París y cómo millones de personas en el mundo muestran su compromiso por hacer de este planeta un lugar más sano y sostenible para todos los seres vivos. ¿Qué cambios estás dispuesto a hacer para proteger nuestro planeta? Comparte tus ideas, escucha las del grupo e indaga más para colaborar de la mejor manera.
cmed.mx/m253



Selva del Amazonas en Brasil. Vista aérea.

Descubro y construyo

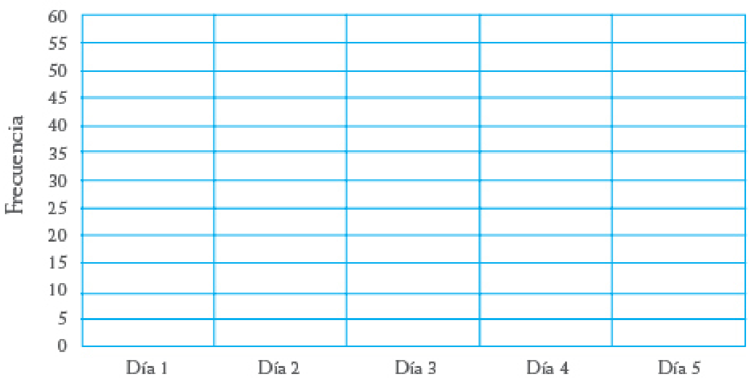
## I. Construyo gráficas de líneas e interpreto la información que contienen.

Reunidos en parejas, analicen la información y resuelvan las actividades.

1. La maestra de arte propuso a sus alumnos un concurso que consistía en diseñar una infografía sobre el buen uso de las redes sociales. Hubo tres finalistas y se decidió publicar sus infografías en una red social del plantel escolar. Quien obtuviera más "me gusta" al final del quinto día sería el ganador. La siguiente tabla muestra la suma de los "me gusta" día a día de cada finalista.

| Mes | Día 1 | Día 2 | Día 3 | Día 4 | Día 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Javier | 14 | 22 | 28 | 40 | 48 |
| Ernestina | 8 | 17 | 31 | 43 | 51 |
| Laura | 10 | 2 | 21 | 36 | 56 |

Elaboren las gráficas correspondientes en el siguiente plano. Marquen el punto que corresponda a la suma de los "me gusta" por día y únanlos para formar la gráfica. Después, respondan.




- ¿Qué día fue mayor la diferencia de votos entre Ernestina y Laura? ¿Cómo se aprecia esto en las gráficas?
- ¿Quién iba ganando el cuarto día?
- ¿Cómo fue el comportamiento de los "me gusta" de los finalistas de acuerdo con lo que se muestra en la gráfica? Describe cuál fue la **tendencia** durante el concurso.
- ¿Cómo se refleja lo anterior en la variación de la pendiente del segmento de recta de cada gráfica?

Comparen sus gráficas y respuestas con las de otras parejas. Discutan: ¿Qué diferencia encuentran entre un polígono de frecuencias y una gráfica de líneas? ¿En qué otra situación utilizarían un gráfico de línea? Registren sus acuerdos en su cuaderno.

### Tomo Nota

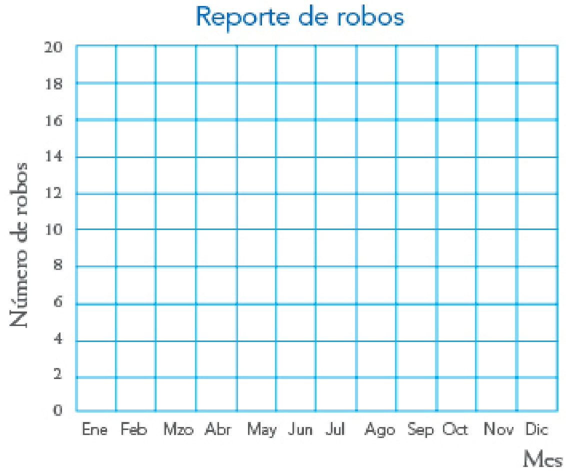
Una **gráfica de línea** es una representación que muestra los valores de una variable que se unen con segmentos de recta. Se utiliza para analizar cambios y la tendencia de una variable a lo largo de un periodo de tiempo.

### GLOSARIO

**Tendencia.** Corriente o preferencia que permite analizar y predecir algún comportamiento de las variables.

2. La siguiente tabla muestra el número de reportes a las autoridades por distintos tipos de siniestros en una colonia de cierta ciudad del país, por mes, de acuerdo con un informe presentado por las autoridades.

| Mes | Ene | Feb | Mzo | Abr | May | Jun | Jul | Ago | Sep | Oct | Nov | Dic |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reporte de robos | 15 | 12 | 13 | 10 | 8 | 7 | 6 | 6 | 12 | 15 | 18 | 15 |

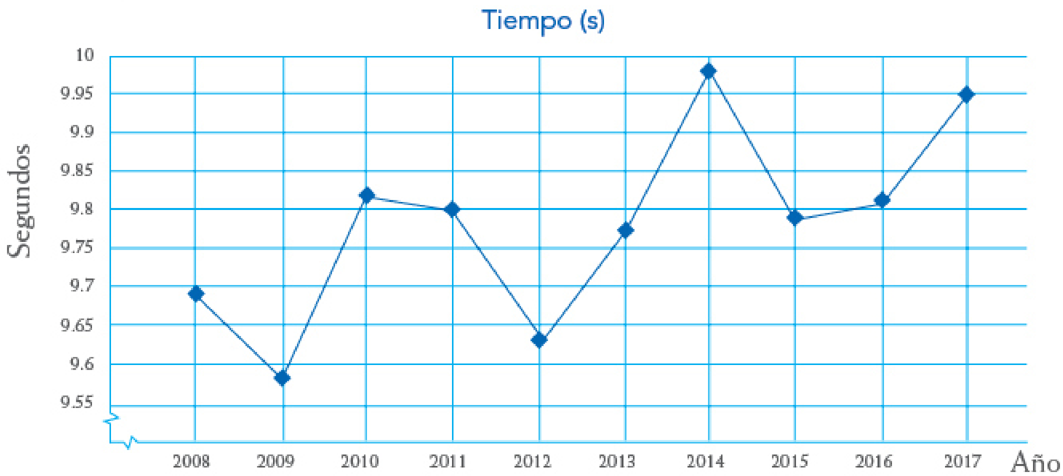



Tracen la gráfica de línea a partir de la información de la tabla.

- ¿En qué mes se reportaron menos siniestros?
- ¿Entre qué meses creció el número de reportes?
- ¿En qué mes hubo mayor cantidad de siniestros?
- ¿En qué meses las autoridades deberían estar alerta de acuerdo con la gráfica?

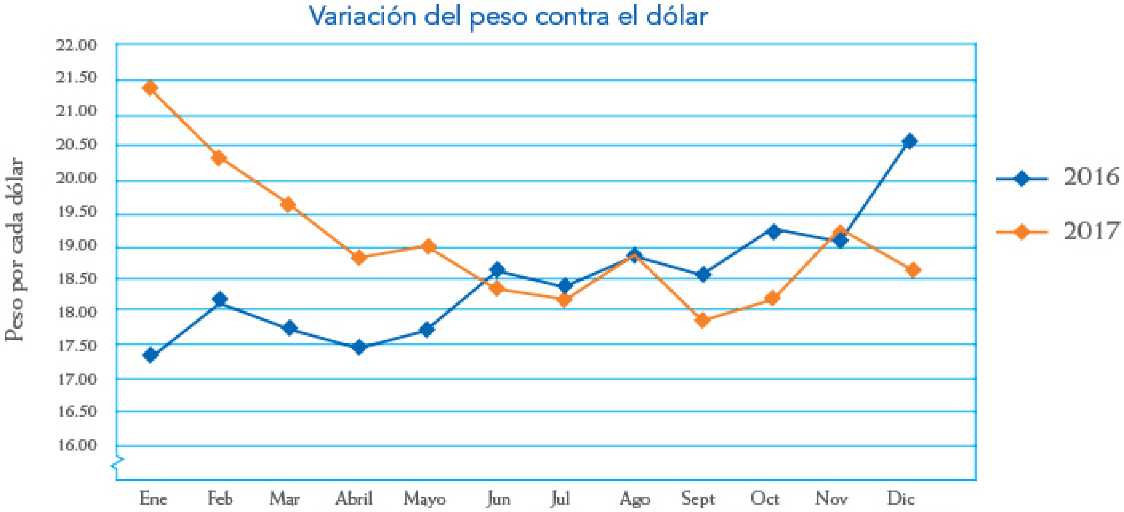
## II. Analizo y describo información presentada en gráficas de línea.

1. La gráfica muestra los mejores tiempos, por año, de Usain Bolt, el multicampeón mundial en la prueba de 100 metros planos y poseedor de muchas marcas mundiales.




- ¿En qué años obtuvo su mejor y su peor tiempo?
- ¿En qué años corrió por debajo de 9.8 segundos?
- ¿Entre qué años la diferencia en sus tiempos fue mayor?
- ¿Qué ventajas tiene el análisis de los tiempos de Usain Bolt a partir de la gráfica?

2. En el siguiente gráfico se muestran los datos sobre la variación del peso frente al dólar, tomando uno de los primeros días de cada mes durante 2016 y 2017.




Fuente: http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?sector=6&idCuadro=CF373&accion=consultarCuadro&locale=es

- ¿En qué mes y año se alcanzó el mayor y el menor precio del dólar? ¿Cómo se refleja esto en la gráfica?
- ¿Cómo se observa gráficamente el mes en el que hubo mayor diferencia en el precio del dólar? ¿En qué mes sucedió?
- ¿En qué año hubo mayor diferencia entre el menor y el mayor tipo de cambio?
- ¿En qué periodos de tiempo el comportamiento del peso frente al dólar fue más estable?
- ¿En qué meses el precio del dólar fue el mismo en ambos años? ¿Cómo se refleja en las gráficas?

Describan el comportamiento del peso frente al dólar en cada año.

- ¿Qué ventajas tiene comparar el tipo de cambio en ambos años en una gráfica de línea?
- ¿Por qué esta información no puede representarse en un polígono de frecuencias?

3. Investiguen el tipo de cambio promedio mensual del peso frente al dólar durante 2018. Representen la gráfica en el plano anterior.

Describan la variación de la relación peso-dólar a partir de la gráfica que construyeron.

- Observen su gráfica y concluyan, ¿qué significa que dos gráficas de línea se intersequen?

Comparen sus respuestas en pareja y establezcan argumentos con base en las gráficas de línea. Discutan las ventajas de interpretar la información en forma gráfica, como el caso de los tiempos de Usain Bolt y por qué las gráficas facilitan la comparación del precio del peso frente al dólar. Registren sus acuerdos.

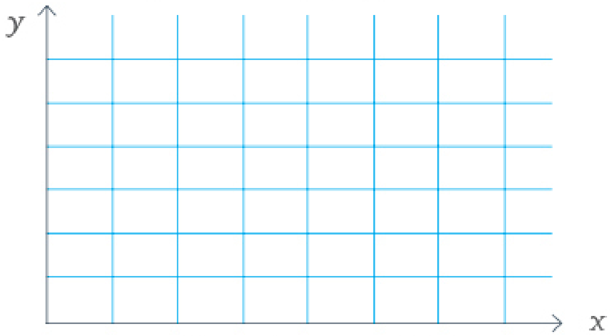
## III. Elijo la mejor herramienta para representar gráficamente la información.

Durante las últimas dos lecciones has utilizado distintas herramientas estadísticas para representar y analizar información gráficamente. En ese sentido, es importante saber en qué casos utilizar una u otra para que la información sea clara y permita tomar decisiones. En pareja, completen las actividades. Recuerden colocar el título en cada gráfica e identificar las variables en los ejes e indicar las unidades.

1. Como cada año, el maestro de historia de una escuela secundaria propuso un viaje con el fin de acercar a los alumnos a la diversidad cultural de México. Sugirió cuatro lugares cercanos a la Ciudad de México: Xochimilco, Tepoztlán, Santiago Tianguistengo y Tlaxcala.

   Hizo una consulta entre sus 53 alumnos y obtuvo los resultados que muestra la tabla. Representen gráficamente los votos que obtuvo cada lugar.

| Lugar | Votos |
|---|---|
| Xochimilco | 12 |
| Tepoztlán | 5 |
| Santiago Tianguistengo | 17 |
| Tlaxcala | 19 |

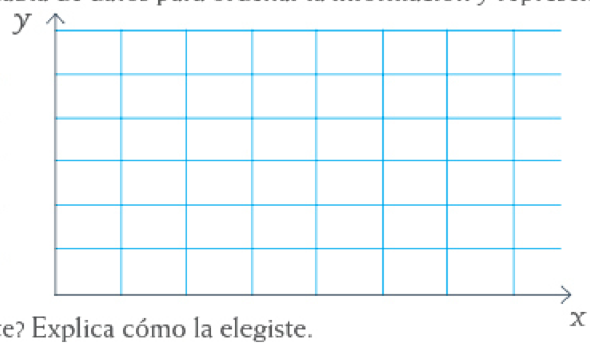



- ¿Qué tipo de gráfica construyeron y por qué escogieron esa gráfica?

2. Después, el maestro preguntó a los padres de familia cuál era su presupuesto para el viaje, dentro de un rango de $250 a $400, y obtuvo la siguiente información, en pesos: 250, 250, 275, 275, 280, 280, 290, 290, 300, 300, 300, 310, 310, 315, 315, 320, 320, 320, 325, 325, 325, 330, 335, 330, 330, 340, 340, 340, 340, 340, 345, 345, 345, 350, 350, 350, 355, 360, 360, 370, 370, 375, 375, 375, 375, 380, 380, 390, 390, 395, 395, 400, 400.

   En el espacio, construyan la tabla de datos para ordenar la información y represéntenla gráficamente.

| | |
|---|---|
| | |
| | |
| | |



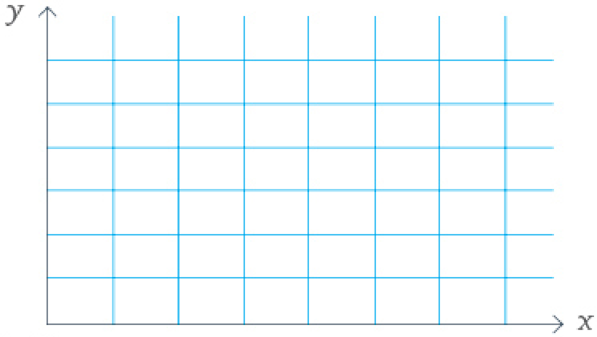

- ¿Qué herramienta utilizaste? Explica cómo la elegiste.

Describan la gráfica que construyeron.

3. El maestro de historia quiso analizar cómo ha ido cambiando el costo del autobús por año a lo largo de los cinco años que ha organizado los viajes culturales. La tabla siguiente contiene los datos recopilados.

- Construyan una representación gráfica que describa la tendencia en el costo del autobús.

| Año | Costo ($) |
|---|---|
| 2014 | 5 300 |
| 2015 | 5 900 |
| 2016 | 6 800 |
| 2017 | 7 900 |
| 2018 | 9 300 |




- ¿Qué tipo de gráfica construiste?
- ¿Es lineal el crecimiento del costo del autobús? Justifica tu respuesta.
- ¿En qué año se dio el alza más grande en el costo del autobús?

Comparen su trabajo con el de otras parejas. Si existen diferencias en las representaciones gráficas, argumenten el porqué de su elección, en busca de acuerdos.

4. Organicen equipos para recopilar información dentro del plantel escolar o en algún sitio de internet, del tema que prefieran, que pueda representarse utilizando los tipos de gráficos vistos hasta ahora. Establezcan características generales y compartan su trabajo en el grupo.
Busquen el apoyo del maestro para mostrar su trabajo en el periódico mural de la escuela.

## Practico

1. A lo largo del año las horas de luz solar o luz natural cambian de acuerdo con la posición de la Tierra. En la siguiente tabla se estima el promedio de horas de luz natural por mes a lo largo de 2018, en la Ciudad de México.

| Mes | Ene | Feb | Mzo | Abr | May | Jun | Jul | Ago | Sep | Oct | Nov | Dic |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo de luz (horas) | 11.1 | 11.7 | 12.3 | 12.8 | 13.2 | 13.3 | 13.1 | 12.5 | 12 | 11.6 | 12.2 | 10.9 |

Construye la gráfica correspondiente a partir de la información de la tabla.
Describan el comportamiento de la gráfica.

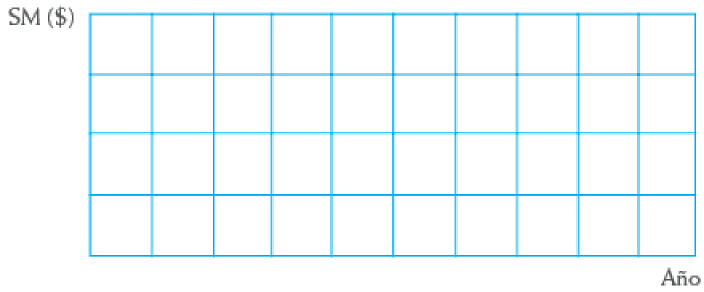
- ¿A qué se debe la diferencia en horas de luz durante los meses del año?

2. Un indicador económico importante es el salario mínimo (SM) que establece, en enero de cada año, el CONASAMI (Consejo Nacional de los Salarios Mínimos) y que corresponde a una jornada de trabajo de ocho horas.

La siguiente tabla presenta los datos del SM de 2010 a la fecha. Tracen una gráfica que describa la tendencia de crecimiento y respondan.

| Año | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SM ($) | 57.46 | 59.82 | 62.33 | 64.76 | 67.29 | 70.10 | 73.04 | 80.04 | 88.36 |

Histórico Salario Mínimo




- ¿Entre qué años se dio el mayor aumento en el salario mínimo?
- ¿De cuánto fue aproximadamente?
- ¿Ha sido constante el aumento del salario mínimo? Justifiquen su respuesta.

**GLOSARIO**

**Inflación.** Es un indicador económico que muestra el aumento en el nivel general de precios y servicios y que implica una pérdida del valor del dinero. Es decir, cuando los precios suben, el dinero no alcanza para adquirir bienes o hacer uso de sevicios .

3. La siguiente gráfica muestra la **inflación** a lo largo de los últimos 8 años en México. Comparen las tendencias y respondan.

Histórico Inflación anual


Fuente: http://www.banxico.org.mx/portal-inflacion/inflacion.html; consultada el 23 de mayo de 2018

- ¿Cuál ha sido el comportamiento de la inflación a lo largo de los años?
- ¿Observan alguna relación entre la inflación y el aumento en el salario mínimo?
- ¿En qué año ha sido mayor la inflación?
- ¿En qué año ha sido menor?

4. En el año 400, la población mundial era de apenas 150 millones durante el Imperio Romano, llegó a 500 millones durante el descubrimiento de América (1492) y a 1 000 millones durante la Revolución Industrial (1800); ahora somos más de 6 000 millones de habitantes y se dice que en 2100 llegaremos a ser más de 10 000 millones.

Construyan un gráfico con la información descrita, considerando las épocas mencionadas.

Población Mundial
(millones)


Describan el crecimiento de la población.

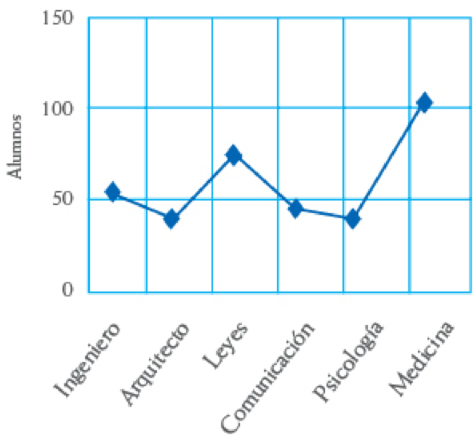
- ¿A qué atribuyen el crecimiento?
- ¿Seguirá la misma tendencia?
- ¿Qué acciones propondrían para reducir el crecimiento?

**Utilizo las TIC**

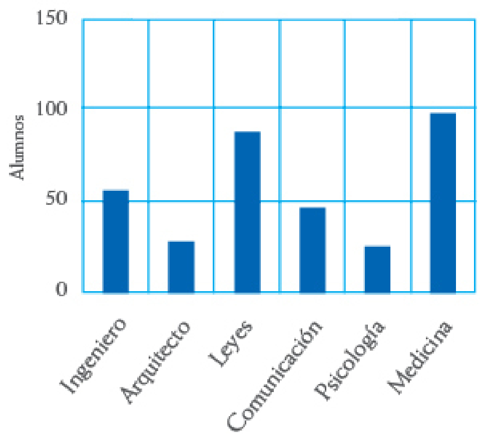
En la siguiente liga encontrarás un video que muestra errores en el uso de las gráficas de línea.
cmed.mx/m254

5. Observen las gráficas que representan la población de alumnos de nuevo ingreso a cierta universidad en una ciudad de la República Mexicana.

Carreras




Carreras




- ¿Qué representación es más adecuada? ¿Por qué?
- ¿La gráfica de barras es un histograma?

## Recapitulo

1. En conjuntos de datos agrupados, el número de intervalos se define según el número de datos o valores por analizar; en promedio pueden ser entre 4 y 7 intervalos.
2. El tamaño de la clase se calcula dividiendo el rango de los datos entre los intervalos.
3. El punto medio o promedio entre los valores mínimo y máximo de un intervalo se llama marca de clase y es representativa del intervalo.
4. Los histogramas son gráficas de barras que representan valores continuos, el ancho es igual al intervalo de la clase y la altura es igual a su frecuencia.
5. El polígono de frecuencias es una gráfica de línea que se construye a partir del punto más alto de la marca de clase de un histograma. Se considera cerrado porque empieza y termina en cero. Permite comparar dos conjuntos de datos en un mismo plano.
6. La gráfica de línea describe el comportamiento de una variable a través del tiempo. En el eje horizontal se coloca el tiempo y en el vertical, la variable por analizar.

# Evalúo mi aprendizaje

Itacate

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Dada la siguiente lista sobre la masa, en kilogramos, de una manada de ciervos, completa la tabla de frecuencias y construye el histograma y el polígono de frecuencias.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 232 | 454 | 266 | 352 | 436 | 363 |
| 400 | 344 | 329 | 385 | 464 | 248 |
| 433 | 465 | 497 | 389 | 301 | 450 |
| 418 | 296 | 270 | 272 | 434 | 366 |
| 463 | 470 | 317 | 241 | 440 | 244 |

Intervalos: Cinco  Rango: _____  Longitud de cada intervalo: __________

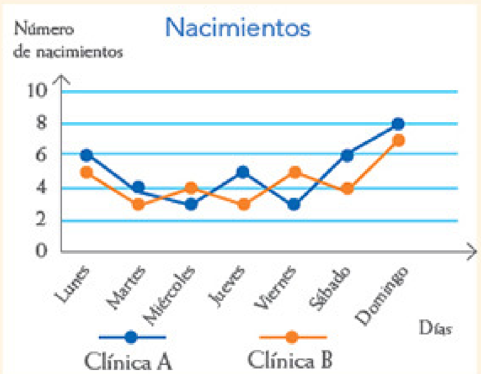
Tabla de frecuencias

| Intervalo (kg) | Marca de clase (kg) | Frecuencia |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |


- ¿Cuál es la masa representativa de los ciervos más pesados?
- ¿Existe algún sesgo en la distribución? ¿Qué tan dispersa se observa ésta?

**2.** El siguiente gráfico muestra los nacimientos por día de dos clínicas de maternidad.

- ¿En qué clínica se dieron más nacimientos el lunes?
- ¿Qué día se dieron más nacimientos?
- ¿Cuántos niños nacieron en total el martes en las dos clínicas?
- ¿Cuál fue la mayor diferencia entre los nacimientos en las clínicas?




Completa la tabla a partir de la información de la gráfica.

| Clínica \ Mes | Número de nacimientos | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ene | Feb | Mzo | Abr | May | Jun | Jul | Ago | Sep | Oct | Nov | Dic |
| Clínica A | | | | | | | | | | | | |
| Clínica B | | | | | | | | | | | | |

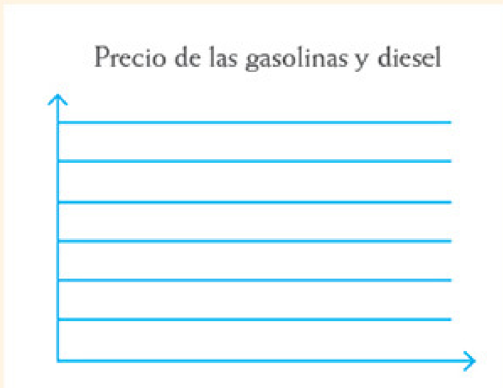
# Logro ir más allá

México ha explotado su petróleo desde hace más de 300 años y ha basado su economía en él. Petróleos Mexicanos (PEMEX) se crea después de la expropiación petrolera en 1938, y ahora que el precio ha bajado a nivel mundial se ha visto en la necesidad de aumentar el precio de las gasolinas por el costo tan alto de refinar el petróleo. A continuación se presenta un histórico del precio de las gasolinas y el diesel de 2012 a la fecha.


| Año | Magna ($) | Premium ($) | Diesel ($) |
|---|---|---|---|
| 2012 | 10.36 | 10.95 | 10.45 |
| 2013 | 11.58 | 12.14 | 11.94 |
| 2014 | 12.86 | 13.56 | 13.39 |
| 2015 | 13.57 | 14.38 | 14.20 |
| 2016 | 13.98 | 14.81 | 14.45 |
| 2017 | 16.22 | 17.96 | 17.05 |
| 2018 | 16.35 | 18.88 | 17.75 |

Fuente: INPC

Construye una gráfica de línea sobre el gráfico con la tendencia de cada tipo de hidrocarburo.




- ¿Los tres hidrocarburos han aumentado al mismo ritmo?
- ¿En qué años ha aumentado más la gasolina?
- ¿En qué basas tu afirmación?
- El crecimiento menor del diesel, ¿en qué años fue?

Determina el porcentaje de aumento de cada uno de los hidrocarburos entre 2016 y 2017 y compáralos con el porcentaje de aumento entre 2015 y 2016.

Calcula el porcentaje de aumento de cada una de las gasolinas tomando los precios mínimo y máximo, y establece algún argumento con esta información.

| Hidrocarburo | Porcentaje 2015-2016 |
|---|---|
| Magna | 3.02 |
| Premium | 2.99 |
| Diesel | 1.76 |

Existe una relación entre el precio del barril de petróleo y el aumento de las gasolinas.

| Hidrocarburo | Porcentaje 2016-2017 |
|---|---|
| Magna | |
| Premium | |
| Diesel | |

Investiga la situación del petróleo en los últimos 10 años y encuentra una justificación a las diferencias entre los porcentajes que encontraste. (Puedes consultar: cmed.mx/m255).

- ¿Qué puedes decir del precio de los hidrocarburos y su impacto en la economía de tu familia?

# EVALUEMOS LO APRENDIDO

Revisa tu **Itacate de evidencias** antes de realizar tu evaluación.

**I. Selecciona la opción correcta. En pareja, compara tus respuestas y procedimientos.**

1. De los siguientes números, ¿cuál no representa un cuadrado perfecto?
   a. 144 b.. 252 c. 81 d. 441

2. Un terreno cuadrado tiene un área de 106 m2. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra la aproximación más cercana a la medida de sus lados?
   a. 10.29 m b. 11.01 m c. 10.32 m d. 10.26 m

3. ¿Qué representación, como potencia, corresponde al número 4 096?
   a. $2^{10}$ b. $4^4 \times 2^1$ c. $(42)^3$ d. $4^7$

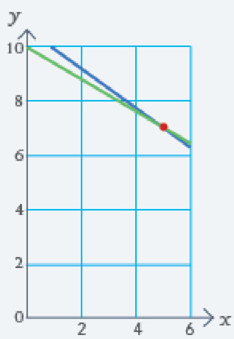
4. ¿Cuál es el resultado de la operación de potencias: $3^5 \times \frac{3^6}{3^8}$?
   a. $3^3$ b. 81 c. $3^5$ d. 9

5. La masa de Marte es de 639 000 000 000 000 000 000 000 kg. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa su masa en notación científica?
   a. $63.9 \times 10^{22}$ b. $6.39 \times 10^{21}$ c $6.39 \times 10^{24}$ d. $6.39 \times 10^{23}$

6. La expresión $-17 + 4n - 4$ representa la regla de la suceción: $-17, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19,\ldots$ ¿Qué otra expresión representa la misma sucesión?
   a. $-21 + 4n$ b. $-17 + 4(n + 1)$ c. $-17 + 4n$ d. $-4n - 21$

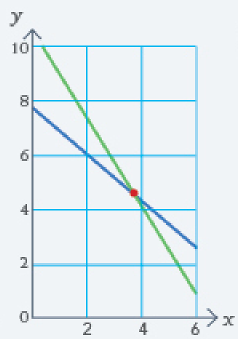
7. ¿Cuál de los siguientes planos representa la solución del sistema de ecuaciones $3x + 5y = 50; 5x + 7y = 74$?

a.




b.


c.




d.


8. Carlos realizó un viaje en una carretera de Estados Unidos. El velocímetro del automóvil marcaba 50 mi/h. Si mantuvo esa velocidad durante 24 minutos, ¿cuántos kilómetros recorrió en este tiempo?
   a. 32.17 km b. 19.45 km c. 42.42 km d. 37.27 km

## Reconoce tus emociones

Comparte aquí tus reflexiones sobre el texto: "La fuerza del viento" y las emociones que provocó en ti, antes de resolver las situaciones planteadas en el numeral **III** de esta evaluación.

___________________

¿Qué es para ti lo más importante de este proverbio hindú.

*No hay árbol que el viento no haya sacudido.*

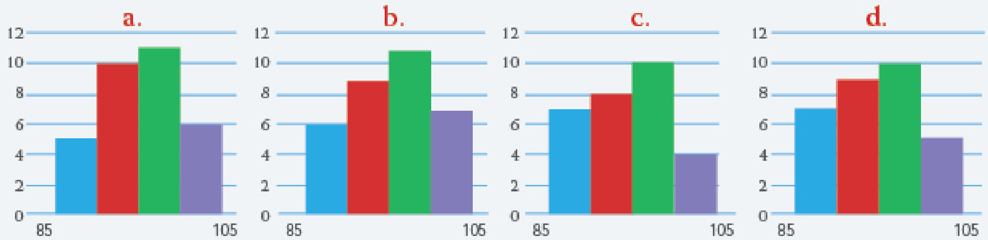
___________________

9. David tiene que pintar una barda de 35.1 m². Si compra la pintura en botes de 1 galón, y 1 litro rinde para 4 m², ¿cuánta pintura gastará aproximadamente?

a. $2\frac{3}{4}$ gal b. $4\frac{1}{2}$ gal b. $2\frac{1}{3}$ gal b. $3\frac{1}{4}$ gal

10. ¿Cuál de los siguientes histogramas representa la información de la tabla? En los cuatro histogramas, los intervalos de clase son los mismos.

| Clase | Intervalo de clase | Frecuencia | Marca de clase |
|---|---|---|---|
| 1 | [85, 90) | 7 | 87.5 |
| 2 | [90, 95) | 9 | 92.5 |
| 3 | [95, 100) | 10 | 97.5 |
| 4 | [100, 105] | 5 | 102.5 |




**II. Resuelve los siguientes problemas.**

1. Si un virus mide $2.1 \times 10^{-10}$ m, ¿cuál es la medida del virus en cm expresada en número decimal?

2. La edad de Pablo más la edad de Natalia es igual a 43 y la diferencia de las edades es igual a 15 años. ¿Qué sistema de ecuaciones representa la situación? ¿Cuántos años tiene cada uno?

3. Una velocista recorrió la prueba de 400 metros en 50 segundos. ¿Cuál fue su promedio de velocidad en km/h?

**III. Lean, en grupo, el texto de inicio del Módulo 2 y contesten:**

1. La energía eólica de Estados Unidos en 2017 fue de 89 000 000 000 w (vatios). ¿cómo se expresa esta cantidad en notación científica?
2. En un campo eólico hay 51 filas de generadores; cada fila tiene dos generadores menos que la siguiente y la fila vigesimosexta tiene 57 generadores.
   a. ¿Cuántos generadores tienen la primera y la última fila?
   b. ¿Cuál es la regla de la sucesión que se genera?
3. Las aspas de un generador eólico miden 45 m de largo. Si dan 25 vueltas en un minuto (25 rpm), ¿a qué velocidad se mueven? Utiliza el redondeo.

**IV. Verifiquen, en parejas, que completaron correctamente los Tomo nota de este Módulo.**

## Mis logros y metas

Como ya tienes completo y revisado tu **Itacate de evidencias**, puedes fácilmente reconocer lo que has aprendido. Completa el cuadro con lo que se pide en cada caso. Apóyate en la **Ruta de aprendizaje.**

| INDICADOR DEL LOGRO | LO SÉ<br>Tengo el conocimiento | | LO SÉ HACER<br>Desarrollé las habilidades para representar y seguir procedimientos | |
|---|---|---|---|---|
| | Sí | Aún no, ¿qué me falta por aprender? | Sí | Aún no |
| **Resuelvo** problemas de potencias con exponente entero y aproximo raíces cuadradas. | | | | |
| **Resuelvo** problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. | | Este aprendizaje se concluye en el Módulo 3. | | |
| **Verifico** algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones. | | | | |
| **Resuelvo** problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra). | | | | |
| **Recolecto**, **registro** y **leo** datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea. | | | | |

| LO VALORO | | COMENTARIOS |
|---|---|---|
| Sí | No | ¿Cómo lo lograré? |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

## Habilidades del siglo XXI

Marca con una (✓) las habilidades que consideres que has alcanzado:

- ☐ Confío en mí
- ☐ Percibo mis emociones
- ☐ Soy responsable
- ☐ Muestro empatía
- ☐ Tengo sentido de comunidad
- ☐ Me comunico
- ☐ Colaboro / participo
- ☐ Me adapto
- ☐ Muestro creatividad
- ☐ Muestro curiosidad e interés
- ☐ Tengo iniciativa
- ☐ Soy persistente
- ☐ Planteo metas positivas
- ☐ Resuelvo problemas
- ☐ Manejo la información
- ☐ Uso los medios
- ☐ Manejo la tecnología
- ☐ Soy consciente del mundo natural y social

*Aunque nada cambie,*
*si yo cambio, todo cambia.*
Marcel Proust

**Utilizo las TIC**

Mira cómo funciona la energía solar: cmed.mx/m264

3er

MÓDULO

# El agua y el Sol

La humanidad ha consumido energía desde tiempos inmemoriales, pero ahora lo hace de manera vertiginosa. La naturaleza tardó millones de años en producir los combustibles fósiles que hoy estamos agotando en muy poco tiempo. A esta velocidad los recursos energéticos no renovables serán insuficientes, por lo que en el mundo entero se han establecido protocolos para su uso eficiente y sostenible con el fin de mantenerlos en equilibrio y evitar que se agoten.

La energía que se produce a partir del Sol es de dos tipos: la energía fotovoltaica para generar electricidad, por ejemplo letreros y lámparas en carreteras, y la energía térmica para calentar el agua.

**El Sol y el agua, fundamentales para la vida**

Si hicieras un recorrido aéreo por México, verías que en muchas azoteas hay calentadores de agua solares. Estos calentadores aprovechan la energía del Sol para calentar agua, que circula por un termosifón: la caliente sube y se almacena en un termotanque, y la fría baja; cuando ésta se calienta con la radiación del Sol, se repite el ciclo. Aprovechar esta energía barata, limpia y renovable es algo de lo mucho que podemos hacer para cuidar nuestro planeta, entendiendo que la Tierra no es de nosotros, nosotros pertenecemos a la Tierra.

Reflexiona sobre esta nota porque la retomarás en la evaluación final del Módulo.

Eje

# NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN

Tema

## ECUACIONES

Aprendizaje esperado

Resuelvo problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

## PATRONES, FIGURAS GEOMÉTRICAS Y EXPRESIONES EQUIVALENTES

Analizo y comparo situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreto y resuelvo problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Formulo expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifico equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

Lección

**21** Métodos de sustitución e igualación para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2

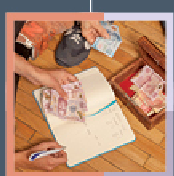
**22** Métodos de eliminación (suma y resta) para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2

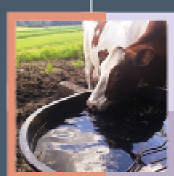
**23** Gráficas lineales y de proporcionalidad inversa

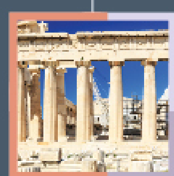
**24** Expresiones algebraicas en modelos geométricos

Logro ir más allá

Proyecto







## Forma, Espacio y Medida

### Magnitudes y medidas

Calculo el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Calculo el volumen de prismas y cilindros rectos.

## Análisis de Datos

### Estadística

Uso e interpreto las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decido cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

**25** Perímetro y área de polígonos regulares

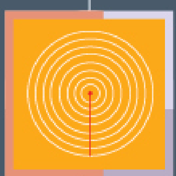
**26** Área del círculo

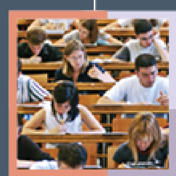
**27** Volumen de primas rectos y cilindros

**28** Problemas relacionados con el volumen y la capacidad

**29** Medidas de tendencia central y de dispersión

**30** La desviación media y la dispersión de los datos





L21

# Métodos de sustitución e igualación para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2

En las lecciones 7 y 16 resolviste sistemas de ecuaciones en forma intuitiva y por el método gráfico; en esta sección aplicaremos dos métodos más rigurosos que implican despejes, sustituciones y operaciones algebraicas.

Exploro

## Sustituyo expresiones algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones.

La ciudad de Guanajuato tiene una enorme oferta cultural y artística. Ha sido sede de eventos extraordinarios de corte internacional.

La dirección del Colegio Montes y los padres de familia están organizando un viaje cultural a Guanajuato para los alumnos de segundo y sus profesores. Los alumnos dormirán en cuartos dobles y los profesores en sencillos. El hotel tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama), sumando en total 47 habitaciones y 79 camas.

Para confirmar si se pueden acomodar, quieren saber cuántas habitaciones hay de cada tipo. Si $x$ denota las habitaciones sencillas y $y$ las dobles, escribe el sistema de ecuaciones que representa la situación:

Ecuación que representa el número de habitaciones (1): ________________

Ecuación que representa el número de camas (2): ______________________

Resuelve el sistema de ecuaciones y responde.

- Si son 40 alumnos y 14 profesores, ¿hay suficiente espacio en el hotel? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué estrategia seguiste para resolver el sistema de ecuaciones?

Considera la misma situación y realiza lo que se pide.

- Despeja $y$ en la primera ecuación.

El despeje anterior representa el valor de $y$ en dicha ecuación.

- Sustituye $y$ en la segunda ecuación por el valor anterior y escribe la ecuación resultante.
  - ¿Qué tipo de ecuación se obtiene?
  - Resuelve la ecuación. ¿Cuánto vale $x$?
  - A partir de la información anterior, ¿cómo determinarías el valor de $y$?
  - ¿Cuánto vale $y$?

Compara los resultados con los que obtuviste originalmente. Pregúntale a un compañero, ¿qué es sustituir? ¿Cómo se usa este término en el procedimiento anterior? Comparen sus respuestas en grupo y comenten sobre este método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones. Hagan una puesta en común con su profesor.

Descubro y construyo

## I. Resuelvo sistemas de ecuaciones por el método de igualación.

1. Lean en pareja la información y respondan.

Los hermanos Julio y Ricardo corren en la misma pista. Inician desde el mismo punto, pero Julio le da una ventaja de 15 m a Ricardo, quien recorre seis metros por segundo; Julio recorre ocho metros por segundo.

- ¿Cuánto tiempo pasará para que Julio alcance a Ricardo?
- Con respecto al punto de inicio, ¿a los cuántos metros alcanzará Julio a Ricardo?

Consideren una ecuación por hermano; representen la distancia recorrida con respecto al punto de partida y definan $x$ como el tiempo transcurrido en segundos. Escriban cada una de las ecuaciones para completar el sistema.

_____ = ______________________ Julio
_____ = ______________________ Ricardo

- ¿Qué expresión representa la distancia recorrida por Julio?

Hagan lo mismo para la distancia recorrida por Ricardo.

- ¿Cuál es la distancia recorrida por ambos en el momento de encontrarse?
- Establezcan una igualdad en función de $x$: ____________________
- Resuelvan la ecuación anterior. ¿Cuál es el valor de $x$?
- ¿Cuánto tiempo pasó para que Julio alcanzara a Ricardo?

Sustituyan $x$ en las ecuaciones para determinar $y$. Verifiquen las igualdades.

- ¿A qué distancia de la salida alcanzó Julio a Ricardo?

2. Establezcan el sistema de ecuaciones de cada problema y resuélvanlo utilizando el método de igualación. Escriban en su cuaderno los pasos de este método.

   a. Rocío tiene en su cartera billetes de $20.00 y de $50.00. En total tiene 9 billetes que suman $270.00. ¿Cuántos billetes tiene de cada denominación?

   b. En un puesto de frutas, una persona compró 2 kg de manzana y 3 kg de mango, por los que pagó $106.00, mientras que otra persona compró 3 kg de manzana y 1 kg de mango, por los que pagó $96.00. ¿Cuál es el precio del kilogramo de manzanas y del de mangos?

   c. María es 12 años mayor que su hermano Pedro, y dentro de dos años sus edades sumarán 50 años. ¿Qué edad tienen ambos actualmente?

Reúnete con un compañero, comparen sus respuestas e identifiquen los pasos del método de igualación. Propongan una situación similar en la que pueda aplicarse este método y resuélvala en grupo.

### Tomo Nota

Los pasos para resolver un sistema de ecuaciones por el **método de igualación** son:

1. Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Igualar los segundos miembros de los despejes anteriores.
3. Resolver la ecuación de primer grado que resulta del paso anterior.
4. Sustituir el valor encontrado en el paso anterior en cualquiera de los dos despejes.

## II. Identifico el método más eficaz para resolver ciertos sistemas de ecuaciones.

1. Resuelve un mismo sistema de ecuaciones con los métodos gráfico y de igualación. ¿Cuál sería el más sencillo para este caso?

Ecuación **1**: $5x - 3y = 9$ Ecuación **2**: $4x + 2y = 15$

❖ Método gráfico:

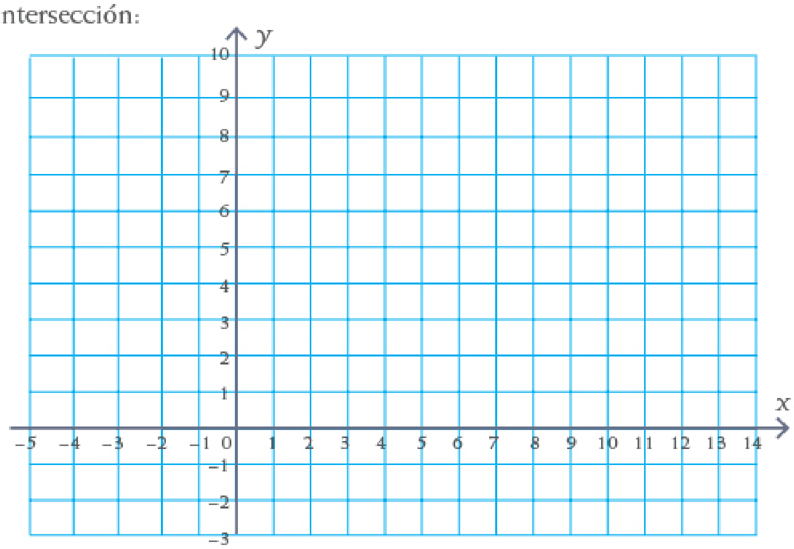
Despeja $y$ en ambas ecuaciones: Ecuación **1**: $y =$ ______________

Ecuación **2**: $y =$ ______________

Como por dos puntos pasa una única recta, encuentra la coordenada $y$ de dos de los puntos de cada recta, $L_1$ y $L_2$.

$L_1$: (0, _____ ) y (3, _____ ) $L_2$: (0, _____ ) y (2, _____ )

2. Grafica las dos rectas en el plano cartesiano y extiéndelas hasta encontrar el punto de intersección:




- Utiliza una aproximación. ¿Cuáles son las coordenadas del punto?

❖ Método de igualación

* Iguala las $y$ de las dos ecuaciones.
* Resuelve la ecuación; recuerda que es más fácil si quitas denominadores. ¿Cuánto vale $x$?
* Sustituye en alguno de tus despejes para encontrar el valor de $y$. ¿Cuánto vale $x$?
* ¿Qué método te parece más eficaz para este sistema de ecuaciones?

Reúnanse en equipos dirigidos por su maestro y comparen sus respuestas y procedimientos; después comenten qué método se les dificultó más y por qué. Repasen los pasos en cada uno de los métodos y detecten cuál se les complicó más; intercambien las estrategias que emplearon. Determinen qué método fue más eficaz en este caso.

## III. Reconozco y aplico el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones.

A Rosa le gusta jugar con su primo Eduardo utilizando números. Rosa le planteó encontrar dos números que sumados den 15 y que el doble de uno de ellos sea igual al otro más 3 unidades. ¿De qué números se trata?

1. Resuelvan el problema, en pareja, siguiendo el procedimiento de Eduardo:
   El sistema de ecuaciones (**1** y **2**) que representa el problema es:
   Ecuación **1**: $x + y = 15$ Ecuación **2**: $2y = x + 3$
   - Eduardo decidió despejar $y$ en la ecuación **1**. ¿Cuál es el despeje o valor de $y$?
   - Eduardo dice que con lo anterior obtiene una ecuación de una sola incógnita, al sustituir $y$ en la ecuación **2**. Completen la sustitución: 2 (__________) = $x + 3$.
   - Resuelve la ecuación que obtuvo Eduardo. ¿Cuánto vale $x$? Después, Eduardo sustituyó $x$ por su valor en una de las ecuaciones y encontró el valor de $y$.
   - Si sustituyes $x$ en la primera ecuación, ¿cómo queda? Resuelve la ecuación y valida que la igualdad se cumpla en la segunda ecuación.
   - ¿Cuáles son las soluciones del sistema?

   El método que utilizó Eduardo se conoce como método de sustitución. Explica por qué crees que recibe este nombre.

2. Utiliza el método de sustitución para resolver el siguiente sistema:
   Ecuación **1**: $x + 2y = 8$ Ecuación **2**: $2x - y = 1$
   Despeja $x$ en la primera ecuación, sustitúyela en la segunda y resuelve.
   Despeje: ____________________
   Sustitución de $x$ en la segunda ecuación: ________________________________
   Resuelve la ecuación anterior: ____________________
   - ¿Cuál es la solución del sistema? ____________________

   Comprueba tu solución sustituyendo en las ecuaciones originales.

3. Trabajen en equipos de tres compañeros y resuelvan en su cuaderno los siguientes sistemas por el método de sustitución.

| | | |
|---|---|---|
| $2x + 3y = 9$<br>$y = 5x - 14$ | $2x + y = 11$<br>$4x - 2y = 2$ | $x = 4y - 35$<br>$y = 2x$ |
| $x + 5y = 5$<br>$2x - y = 10$ | $3x + 4y = 6$<br>$y = \frac{3}{4}$ | $7x - 3y = 20$<br>$2x + 2y = 0$ |

Verifiquen sus resultados sustituyendo los valores de $x$ y $y$ en ambas ecuaciones. Juntos establezcan estrategias para identificar qué incógnita conviene más despejar; comparen sus observaciones.

Compartan sus respuestas con un integrante del grupo y juntos resuelvan cada sistema de ecuaciones por el método gráfico. ¿Sus resultados coinciden? Comenten con el maestro las ventajas y desventajas de usar la intuición y el método gráfico o el de sustitución para resolver los sistemas; escriban sus conclusiones en una tabla.

**Utilizo las TIC**

Consulta la página cmed.mx/m256 para aprender y practicar más el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones.

## IV. Conozco y comparo métodos de solución de sistemas de ecuaciones: el gráfico, el de igualación y el de sustitución.

1. Trabaja con un compañero y resuelvan las siguientes situaciones:

En una tienda de café en San Cristóbal de las Casas se preparan mezclas con diferentes tipos de granos. La mezcla de la casa contiene 200 g de la variedad arábica y 300 g de la robusta, y el medio kilo cuesta $148. La mezcla especial contiene 300 g de arábica y 200 g de robusta, y el medio kilo cuesta $114.

Establezcan $x$ como el precio de 100 g del café arábica y como $y$ el precio de 100 g del robusta y escriban el sistema que corresponde a las dos mezclas de café.
Ecuación **1**: ___________________ Ecuación **2**: ___________________

- Sin resolver el sistema, ¿qué mezcla creen que cueste más? Justifiquen su respuesta.

Resuelvan el sistema por el método de sustitución. Pueden usar su calculadora para hacer las operaciones.

- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación?
- ¿Cuánto cuestan 100 g de café arábica y 100 g de café robusta?

Verifiquen su respuesta con el método gráfico haciendo uso de *Geogebra*.

2. Consideren el siguiente sistema de ecuaciones:
Ecuación **1**: ___________________ Ecuación **2**: ___________________

- Resuelvan el sistema utilizando el método de sustitución. ¿Cuál es la solución?
- Grafiquen las dos rectas que representa el sistema y encuentren el punto de intersección. ¿Coincide la solución? Prueben con el método de igualación y resuelvan el sistema.
- ¿Qué método les parece más eficaz para resolver este sistema? Justifiquen su respuesta.

3. El maestro de Alberto le pidió resolver el siguiente sistema:
Ecuación **1**: $8x - 6y = 7$ Ecuación **2**: $4x - 3y = 10$

Alberto comentó: "el sistema no tiene solución".

- Resuelvan por el método de sustitución.
- ¿Están de acuerdo con Alberto? Justifiquen su respuesta

Discutan si los métodos gráfico, de igualación y de sustitución dan el mismo resultado. ¿Cómo saber qué método conviene más aplicar? ¿Cúal les pareció más sencillo? Apliquen la tabla de ventajas y desventajas que hicieron en la página anterior; ¿hay coincidencias? Comenten con su maestro y actualicen su tabla si lo consideran necesario.

### Tomo Nota

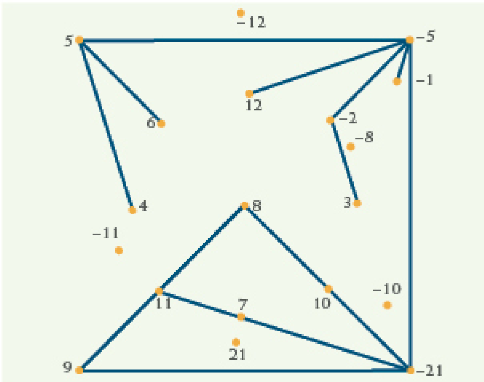
El **método de sustitución** para resolver un sistema de ecuaciones de 2 × 2 consiste en:

1. Despejar una incognita de una de las ecuaciones.
2. Sustituir la incógnita en la otra ecuación para obtener una ecuación lineal con una sola incógnita.
3. Resolver la ecuación lineal resultante.
4. Sustituir en el despeje para encontrar el valor de la otra incógnita.

Practico

1. Resuelvan en parejas los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de sustitución o igualación. En el siguiente esquema, unan la respuesta de cada sistema con un segmento de recta y descubran las figuras geométricas que se forman:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x + y = 13$<br>$y = 2x + 4$ (3, 10) | $y = x - 10$<br>$x + 2y = 4$ | $10r - 7t = 0$<br>$24 - 2r = t$ | $x + y = 16$<br>$x + 2y = 23$ |
| $x + y = 14$<br>$y = x + 4$ | $y = 2x$<br>$3y + x = 42$ | $x = -3y$<br>$5x + y = 14$ | $x - y = -24$<br>$x + 8y = 3$ |
| $y = x - 7$<br>$x + 2y = 19$ | $r = s + 7$<br>$3r - 5s = 31$ | $x - y = 2$<br>$x + y = 14$ | $2x - 3y = -15$<br>$3x - 4y = -18$ |




2. Rocío y su hermano Rafael son aficionados al modelismo y tienen una colección de barcos y aviones. Rocío comentó: "Si tuviéramos 11 barcos más, tendríamos el mismo número de barcos y aviones", a lo que Rafael respondió: "Pero si tuviéramos 12 aviones más, tendríamos el doble de aviones que de barcos".

Modela con un sistema de ecuaciones el problema para calcular el número de piezas de cada tipo utilizando el método de sustitución. ¿Cuántos barcos y aviones tienen Rocío y Rafael?

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por sustitución:

| | |
|---|---|
| (1) $3y - 2x = 41$<br>(2) $4x + 7 = y$ | (1) $5y - 6 = x$<br>(2) $3x + 7y = -40$ |

4. Resuelve los siguientes sistemas por igualación:

| | |
|---|---|
| (1) $9x + y = 2$<br>(2) $y = 3x + 38$ | (1) $3m = -n$<br>(2) $2m + 5n = -39$ |

5. Si el perímetro de un triángulo isósceles mide 26 cm y los lados iguales miden $\frac{4}{5}$ partes del lado desigual, ¿cuánto mide cada uno de los lados del triángulo? Haz un dibujo en tu cuaderno con la información del triángulo, escribe el sistema de ecuaciones que representa y resuélvelo por el método más eficaz.

L22

# Método de eliminación (suma y resta) para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2

En lecciones anteriores resolvimos sistemas de ecuaciones lineales de $2 \times 2$ por diferentes métodos: igualación, gráfico y de sustitución. En esta lección aprenderás un método nuevo y lo compararás con los otros; así podrás resolver problemas de manera más eficiente.

Exploro

**Resuelvo un problema que representa un sistema de ecuaciones $2 \times 2$ aplicando conocimientos previos.**

Don Fermín es el zapatero de la colonia Marte. Hoy reparó varios tacones de zapatos de hombre y de mujer. Pone 4 clavos en los tacones de hombre y uno en los tacones de mujer. Al terminar la jornada puso en total 116 clavos en los 47 zapatos que arregló.

Completa el sistema de ecuaciones que representa el problema.

$$(1)\ 4x + y = \_\_\_\_\_\_$$
$$(2)\ \ x + y = \_\_\_\_\_\_$$

- ¿Cuántos zapatos de hombre y de mujer reparó Fermín?
- ¿Qué método usaste para resolver el problema?

Ahora, con el sistema de ecuaciones completo, resta la ecuación (**2**) de la ecuación (**1**) para obtener una nueva.

$$\begin{array}{rl} (1) & \ \ 4x + y = \_\_\_ \\ (2) & -(x + y = \_\_\_) \\ \hline \end{array}$$

- ¿Qué observas en esta nueva ecuación?
- ¿Qué ecuación resultó?
- Resuelve la ecuación resultante. ¿Qué representa el resultado?
- ¿Cómo podrías conocer la cantidad de zapatos de hombre a partir de lo anterior?
- Sustituye $x$ por su valor y resuelve. ¿Cuánto vale $y$?
- ¿Corresponden a los valores que encontraste al inicio? ¿Por qué crees que sucede esto?

Trabaja con una pareja; comparen sus respuestas y analicen qué se debe hacer para reducir un sistema de ecuaciones a una sola ecuación con una incógnita.

Descubro y construyo

**I. Resuelvo un sistema de ecuaciones eliminando una de las incógnitas.**

1. Resuelve con un compañero el siguiente problema utilizando sistemas de ecuaciones.

El equipo de *taekwondo* de Manuel festejó su triunfo con una comida. Los siete compañeros pidieron 15 cajas de alitas y tres cajitas de verduras, y pagaron $750.00; después pidieron 20 cajas de alitas y dos cajitas de verduras y pagaron $950.00.

- ¿Cuál es el precio de las cajas de alitas y el de las cajitas de verdudas?

a. Para hacer las cuentas en forma justa decidieron calcular por separado el costo de las alitas y el de las cajitas de verduras.

Anoten el sistema de ecuaciones que describe el problema en términos del precio de las cajas de alitas y de las cajitas de verduras.

Ecuación **1**: ______________________ Ecuación **2**: ______________________

- Resuelvan el sistema con cualquiera de los métodos que conocen. ¿Cuánto cuesta cada caja de alitas y cada cajita de verduras?
- ¿Qué método emplearon para encontrar la solución?

b. A Manuel se le ocurrió simplificar la primera ecuación y la dividió entre 5. En la ecuación **2**, ¿qué operación tendría que hacerse para que la incógnita que representa las cajitas de verduras tenga el mismo coeficiente que el de la ecuación **1**? Escriban el sistema que obtuvo Manuel.

Ecuación **1**: ______________________ Ecuación **2**: ______________________

- ¿Es correcto lo que hizo Manuel? Expliquen por qué.
- De acuerdo con lo que vieron en la actividad anterior, ¿cómo se puede simplificar este sistema para obtener una ecuación con una sola incógnita?
  » Resuelve la ecuación resultante. ¿Cambia con respecto a la solución del sistema anterior?
- ¿Simplificar las ecuaciones facilitó la solución?

2. En el sistema de ecuaciones: (**1**) $8x - 4y = 52$ (**2**) $4x + 3y = 11$, realiza lo siguiente:
   » Divide la ecuación 1 entre dos: ______________________
   » Escribe el sistema de ecuaciones que se obtiene de esta operación.
   Ecuación **1**: ______________________ Ecuación **2**: ______________________
   » Resta las dos ecuaciones, como se hizo al principio de la lección.
   » Escribe la ecuación resultante y resuélvela: ______________________
   » Resuelve el sistema con esta información: $x =$ ________ $y =$ ________
   - ¿Sirvió este método para simplificar el sistema?

En una puesta en común con el maestro, analicen los resultados y concluyan sobre cómo simplificar los sistemas sumando o restando las ecuaciones.

**II. Utilizo el método de eliminación o de suma y resta para resolver un sistema de ecuaciones.**

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1)\ 4x - 5y = 3$$
$$(2)\ -3x + 7y = 14$$

- Si sumas o restas las ecuaciones, ¿se elimina alguna incógnita? ¿Por qué?
- ¿Qué se necesita para que al sumar se elimine una incógnita?
- ¿Cómo podrías lograrlo? Describe los pasos para cancelar la incógnita $x$.

Aplica los pasos y escribe cómo quedaría el sistema.

(1) ______________________

(2) ______________________

Escribe en el recuadro el signo de la operación que tienes que realizar para simplificar el número de incógnitas; resuelve la operación completando el sistema para comprobar si estás en lo correcto.

☐ (1) ______________________

(2) ______________________

Despejando obtenemos que $y = 5$; obtén el valor de x sustituyendo el valor de $y$ en cualquiera de las ecuaciones originales y resuelve la ecuación para encontrar que $x = 7$.

- ¿Qué procedimiento tienes que hacer si quieres cancelar la incógnita $y$? Resuelve el sistema en tu cuaderno; elimina la $y$ siguiendo el procedimiento anterior.
- ¿Cambia la solución?

2. Trabaja con un compañero y juntos resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones eliminando una incógnita:

$$(1)\ 6x + 2y = 2$$
$$(2)\ 7x + 3y = -3$$

- ¿Qué incógnita decidieron eliminar?
- ¿Qué procedimiento proponen para lograrlo?

Escriban la expresión que se obtiene.

- Utilicen la expresión para resolver el sistema. ¿Cuál es la solución del sistema?

3. Resuelvan juntos:

a. $3x - y = 14$
   $2x + 2y = 12$

b. $x + 5y = -6$
   $2x - y = -1$

c. $3x + 2y = 2$
   $-5x + y = -12$

Analicen con otra pareja si realizaron el mismo procedimiento; de no coincidir, comparen sus respuestas y revisen distintas alternativas de solución eliminando una de las dos incógnitas. Resuelvan el sistema en equipo por cualquiera de los métodos que se vieron anteriormente y comenten sobre los distintos procedimientos; ¿cambia la solución?, ¿de qué manera es más sencillo resolverlo?

### Tomo Nota

El método de eliminación o de suma y resta consiste en multiplicar, por un valor, una o dos de las ecuaciones del sistema para que el coeficiente de una de las variables o incógnitas sea igual en ambas ecuaciones. Se elimina la incógnita que tiene el mismo coeficiente por medio de una suma o de una resta y se reduce el sistema a una sola ecuación con una incógnita.

## III. Encuentro un procedimiento para eliminar una incógnita en sistemas de ecuaciones 2 x 2.

1. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, escoge una incógnita a eliminar y escribe qué operación debe hacerse para eliminarla.

   a. $3x + 5y = -4$
      $2x + y = 2$ ______________________________
   b. $5x + 6y = 42$
      $2x - 3y = 6$ ______________________________
   c. $3x - 2y = 9$
      $2x + 5y = -13$ ______________________________

2. Resuelve los sistemas del ejercicio anterior por el método de eliminación.
   Solución (a) __________ Solución (b) __________ Solución (c) __________

3. La señora Mercedes hace galletas de nuez y de naranja para vender en el mercado. La caja con 6 galletas de nuez y 4 de naranja la vende en \$30.00 y la caja con 4 de nuez y 4 de naranja en \$24.00.
   Plantea el sistema que representa la información del problema. ______________
   ______________
   Suma o resta las ecuaciones, tratando de eliminar alguna de las incógnitas.
   - ¿Qué operación conviene hacer? ______________________
   - ¿Cuál es la solución? ______________
   - Ahora, con los valores que encontraste, ¿cuánto cuesta una caja con 6 galletas de nuez y 6 de naranja?

4. Resuelve el siguiente sistema por el método de eliminación. Primero responde las preguntas que te ayudarán a resolverlo.

$$\frac{3}{4}x + 0.2y = -0.3$$
$$5x + \frac{1}{2}y = 1$$

   » Determina qué incógnita quieres eliminar.
   Completa escribiendo en la línea el coeficiente de la incógnita que escogiste:
   $a$= _____ Coeficiente de la incógnita en la primera ecuación.
   $b$= _____ Coeficiente de la incógnita en la segunda ecuación.
   » Multiplica la primera ecuación por $b$ y la segunda ecuación por $a$.
   - Escribe el sistema de ecuaciones que resulte. ¿Cuál es el coeficiente de la incógnita que escogiste eliminar?
   - Para eliminar la incógnita, ¿tienes que sumar o restar? Resuelve el sistema.

Reúnete con un integrante del grupo y comparen sus respuestas. Comenten sobre la utilidad de que se elimine una incógnita con coeficientes enteros, decimales o fraccionarios. Completen un párrafo similar al *Tomo nota* de esta página para eliminar la incógnita $y$. Analicen si se podrá lograr y qué ventajas encuentran con este método comparado con los estudiados antes.

### Tomo Nota

Un sistema de ecuaciones de tipo $\begin{matrix} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{matrix}$ se puede resolver por eliminación, multiplicando la primera ecuación por $d$ y la segunda por $-a$ para eliminar la incógnita $x$ al sumar las ecuaciones.
Es decir, se multiplica cada ecuación por el coeficiente opuesto de la incógnita que se quiere eliminar.

## IV. Comparo cuatro métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Resuelve el siguiente sistema utilizando los cuatro métodos algebraicos que ya conoces; utiliza *Geogebra*, tu calculadora o cualquier recurso tecnológico para resolver ecuaciones y comprobar tus resultados. Sigue los pasos de cada uno de los métodos.

$$4x + 5y = 10$$
$$8x + 15y = 0$$

- ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones?
- ¿Qué método te pareció más sencillo para resolverlo? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué método se te complicó más? Escribe por qué.

Reúnete en pareja y platiquen sobre qué relación tiene el nombre de cada uno de los cuatro métodos que aprendiste con los pasos correspondientes para cada procedimiento.

### Practico

1. Relaciona las columnas siguientes de acuerdo con el método más conveniente para resolver un sistema a partir de las condiciones que se presentan. Puedes relacionar dos condiciones para un mismo método o dos métodos para una condición.

   (____) Una incógnita está despejada.
   (____) La misma incógnita tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones.
   (____) La solución es fraccionaria o decimal.
   (____) La misma incógnita está despejada en ambas ecuaciones.
   (____) Los coeficientes de las ecuaciones son fraccionarios.
   (____) Los coeficientes son números muy grandes.
   (____) Es fácil despejar cualquier incógnita.

   **1.** Eliminación
   **2.** Gráfico
   **3.** Igualación
   **4.** Sustitución

2. México se encuentra en el lugar número 43 de 222 países en el medallero histórico de los juegos olímpicos, con 13 medallas de oro. Si son 69 medallas en total y el doble de las de plata menos las de bronce son 19,
   - ¿Cuántas de plata y cuántas de bronce ha ganado México?

   Establece el sistema de ecuaciones que describe el problema.

   ______________________________

   ______________________________

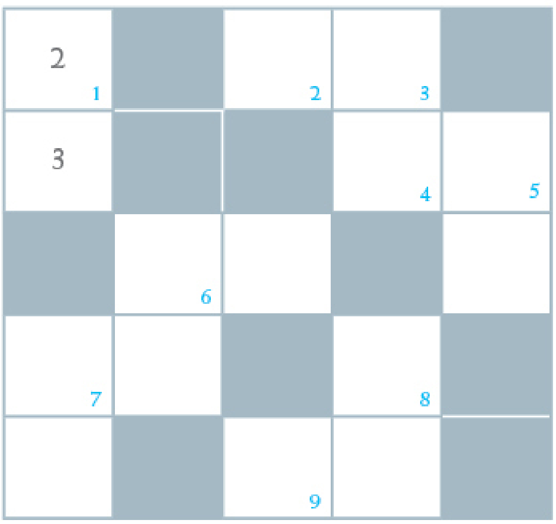
   Describe el procedimiento que se necesita para eliminar una incógnita.
   - Completa el procedimiento y resuelve el problema. ¿Cuántas medallas de plata y cuántas de bronce ha ganado México?

3. Plantea un sistema de ecuaciones para resolver el siguiente problema.
   Don Lupe tiene dos camiones de carga de 3 y 4 toneladas respectivamente. Si con los dos camiones realizó 25 viajes para transportar 86 toneladas y por viaje paga $285.00 a cada chofer, ¿cuánto tendrá que pagarle a cada uno?
   Justifica por qué eligiste ese método para resolverlo.

4. Encuentra la solución del sistema de ecuaciones por el método de eliminación o de suma y resta. Coloca la solución en las casillas del crucigrama con base en las siguientes instrucciones:

- Si la respuesta es de los sistemas "verticales", cada dígito de la solución se coloca verticalmente, y si es de los horizontales, se coloca de manera horizontal. Observa en el crucigrama la solución del sistema 1.

| Verticales | Horizontales |
|---|---|
| 1. $x + y = 37$<br>$2y = 28$<br>$x = 23$ | 2. $3x - 2y = 5$<br>$2x + 3y = 38$<br>$2x + 1 =$ |
| 3. $2x + 6 = y$<br>$3x - y = 20$<br>$y =$ | 4. $4x + y = 20$<br>$5x + 3y = 4$<br>$-12y =$ |
| 5. $x + y = 5$<br>$3x + 2y = 50$<br>$x =$ | 6. $6x - 2y = 16$<br>$3x + 5y = -4$<br>$4x - y =$ |
| 6. $x - y = -2$<br>$8x - 3y = 24$<br>$2x + 1 =$ | 7. $7x + 5y = 17$<br>$-3x - 4y = 2$<br>$3y + 2 =$ |
| 7. $5x + y = -2$<br>$2x - 2y = -56$<br>$y =$ | 9. $5x - 9y = 29$<br>$2x - 3y = 11$<br>$3x =$ |
| 8. $3x + 2y = 30$<br>$4x - 3y = 23$<br>$4x =$ | |




**Utilizo las TIC**

Para practicar y conocer más sobre el método de eliminación para resolver sistemas de ecuaciones lineales, entra a la siguiente página: cmed.mx/m257

# Recapitulo

1. Con cualquier método para resolver sistemas de ecuaciones lineales se obtiene la misma solución. Los métodos son:

   Gráfico: Se *grafican* las rectas de cada ecuación y se busca el punto de intersección.

   Sustitución: Se despeja una incógnita y se *sustituye* en la otra ecuación.

   Igualación: Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se *igualan* los despejes.

   Eliminación o suma y resta: Se *elimina* una incógnita *sumando* o *restando* las ecuaciones con el mismo coeficiente.
2. Un sistema puede tener una, ninguna o una infinidad de soluciones.
3. Si las soluciones son fracciones o decimales y no usamos un recurso tecnológico, se dificulta hallar la solución exacta por el método gráfico.
4. Para determinar que un sistema no tiene solución, podemos comprobar que representa dos rectas paralelas con diferente ordenada al origen.
5. En el método de eliminación, las ecuaciones se ordenan para que las mismas variables queden alineadas por columnas.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

1. Resuelve los siguientes problemas por el método que te parezca más eficaz; escribe qué método elegiste, su justificación y la solución.
   a. Dos ángulos son complementarios y el mayor mide 15 grados más que el doble del menor.
      Sistema: Justificación:
      Método: Solución:
   b. La tarifa de "Taxi-cha" es de \$12.00 por banderazo (costo al encender el taxímetro) y \$4.00 por kilómetro avanzado; el costo de "Tu taxi" establece \$10.00 por banderazo y \$4.50 pesos por kilómetro. ¿Qué distancia tendría que recorrer cada compañía para que el costo sea el mismo? ¿Cuál es el costo del recorrido?
      Sistema: Justificación:
      Método: Solución:
   c. En la tienda de deportes venden 3 balones y 2 pares de tenis por \$840.00, y por la misma cantidad 3 pares de tenis y una pelota. ¿Cuánto cuesta cada uno de los artículos?
      Sistema: Justificación:
      Método: Solución:
2. Describe el procedimiento para resolver el siguiente sistema por eliminación y resuélvelo.

   $2x - 7y = 25$ (1)
   $5x - 3y = -1$ (2)

   Procedimiento: ____________________
   Solución: ____________________
3. Resuelve los siguientes sistemas por el método de eliminación o suma y resta.

| | | |
|---|---|---|
| a. $5m - n = 11$<br>$2m + 3n = 18$ | b. $0.02x - 0.05y = -0.19$<br>$0.03x - 0.05y = 0.52$ | c. $\frac{3}{4}x + 7y = \frac{47}{4}$<br>$\frac{1}{4}x - 2y = -\frac{19}{4}$ |

4. Crea un problema cuyas soluciones sean $x = 2.5$ y $y = 7$; resuélvelo por el método de eliminación.

# Logro ir **más allá**

Cuando te dan dinero, ¿qué es lo primero que se te ocurre hacer con él?

El ahorro es la parte de nuestros ingresos que no destinamos al gasto. Es una cantidad que reservaremos para comida, para gastos diarios o para cubrir muchas otras necesidades. Ahorramos también para tomar un curso, salir de viaje, hacer un gasto mayor, o bien para cubrir gastos imprevistos como enfermedades o accidentes.

Lee el siguiente problema y resuélvelo.

El abuelo Tite le da a cada uno de sus nietos $50.00 de domingo. Enrique y sus primos, Alejandro y María, están pensando ahorrar algo de sus domingos para poder ir de vacaciones, y trazan un plan: cada uno aportará la misma cantidad semanalmente. Saben que necesitan $3 000.00 en total, pero no saben cuánto tienen que ahorrar cada semana ni cuánto tiempo les llevará juntar esa cantidad. Su primo Pedro, el mayor, les comentó que al cabo de tres meses ahorró $325.00 y al final de un año ya tenía $1 325.00. Los tres primos pusieron cara de felicidad y decidieron hacer lo mismo que Pedro.

- ¿Con cuánto dinero empezó Pedro sus ahorros?
- ¿Cuánto ahorró cada semana para tener esa cantidad?
- ¿Cuántas semanas hay en tres meses? ¿Cuántas semanas en un año? 12 semanas en tres meses y 52 semanas en un año.

Plantea un sistema de ecuaciones para determinar el ahorro inicial de Pedro y su ahorro semanal. Define las variables.

Sistema: ______________________

______________________

Ahorro inicial: ______________________

Ahorro semanal (redondeado): ______________________

Escribe una ecuación que represente el ahorro de los tres primos al cabo de tres meses.

______________________________________________

- ¿Cuánto tiempo les tomará a los primos juntar $3 000.00?

**Utilizo las TIC**

Entra a *Ahorro, el primer paso para alcanzar tus metas*: cmed.mx/m258

Aquí podrás leer cinco cuentos que cambiarán *tu relación con el dinero*: cmed.mx/m259

L23

# Gráficas lineales y de proporcionalidad inversa

Actualmente los aviones se consideran el medio de transporte más seguro del mundo. Desde hace siglos, el ser humano buscó la manera de cumplir su deseo de volar; hubo muchos intentos fallidos, pero en 1853 el británico George Cayley diseñó un planeador que fue tripulado por su ayudante, quien se convirtió en el primer hombre en realizar un vuelo de corta duración. Cayley dedujo muchas de las leyes físicas de la aviación.

Exploro

## Identifico la relación distancia-tiempo a partir de la velocidad (rapidez) de un avión.

1. Durante un vuelo comercial un avión, que viaja a cierta velocidad promedio, recorre 1 200 km en 2 horas.
   - Si mantiene el mismo promedio de velocidad, ¿en cuánto tiempo recorrerá 3 000 km?
   - ¿Cómo varía la distancia en relación con el tiempo?

Si $x$ representa el tiempo (medido en horas) y representa la distancia (medida en kilómetros), escribe la relación entre las variables con una expresión algebraica.

   - ¿Qué características tendría la gráfica de la relación anterior? Explica por qué.
   - ¿Qué se puede decir de la **pendiente** de la recta si la velocidad aumenta?
   - ¿A qué velocidad viaja el avión?

2. Suponiendo que la distancia recorrida por el avión sea siempre igual a 1 200 km, considera las siguientes velocidades y completa la tabla. Después marca los puntos correspondientes en el plano y únelos.

| Velocidad (km/h) | Tiempo en (h) que recorre 1 200 km |
|---|---|
| 200 | |
| 300 | |
| 400 | |
| 500 | |
| 600 | |
| 800 | |
| 1 000 | |


   - ¿Cómo varía el tiempo en función de la velocidad del avión?
   - ¿Qué expresión algebraica muestra la relación entre las variables $x$ (velocidad en km/h) y $y$ (tiempo en horas)?

Comparen, en parejas, sus respuestas. Comenten sobre la relación entre las variables de la actividad y sobre la representación gráfica. ¿Qué tipo de gráfica se formó: creciente o decreciente? ¿Qué diferencia hay con las gráficas lineales que trabajaron antes?

Leo +

Ingresa a la liga: cmed.mx/m260 y conocerás mucho más acerca de la historia de la aviación.
Este video animado en 3D muestra una breve historia de la aviación; disfrútalo: cmed.mx/m261

GLOSARIO

**Pendiente:** Corresponde a la inclinación de la recta, respecto al eje $x$, de una función lineal.

Modelo de avión diseñado por Traian Vuia en 1907 (Rumania). Museo de aviación de la fuerza aérea de la Federación de Rusia.

## Descubro y construyo

**I. Represento gráficamente una relación de proporcionalidad inversa.**

1. Trabaja en pareja y respondan.

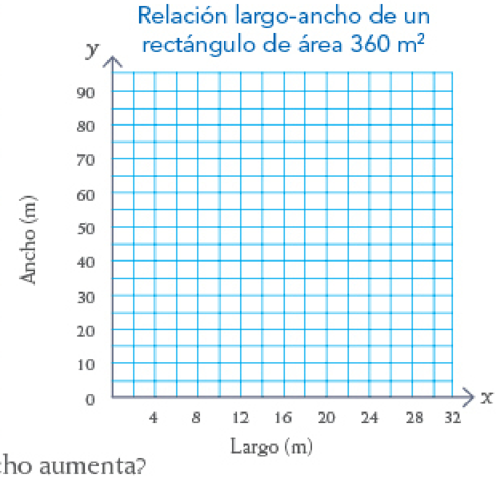
Pablo tiene un terreno rectangular con área de 360 m² que quiere cercar, pero no recuerda las medidas de largo y ancho del terreno.

- ¿Cuáles pueden ser las medidas del terreno de Pablo?
- ¿Estas medidas serían únicas? ¿Por qué?

a. Escriban en la siguiente tabla posibles valores de ancho y largo del terreno cuya área sume 360 m². Observen el ejemplo.

b. En el plano cartesiano, coloquen los puntos que correspondan a cada pareja ($b$, $h$) de la tabla y únanlos con una línea continua para formar la gráfica.

| ($b$) Largo (m) | ($h$) Ancho (m) | Área (m²) |
|---|---|---|
| 4 | 90 | 360 |
| | | 360 |
| | | 360 |
| | | 360 |
| | | 360 |
| | | 360 |
| | | 360 |
| | | 360 |
| | | 360 |




- ¿Qué ocurre con el largo si el ancho aumenta?
- ¿Qué tipo de relación existe entre las dimensiones del rectángulo?
- Si llamamos $b$ al largo y $h$ al ancho del terreno, ¿qué expresión algebraica representa la situación?
- ¿Qué características tienen todos los puntos que se encuentran sobre la gráfica?

Describan cómo se comporta la gráfica conforme aumentan los valores de $b$.

- ¿Qué sucede con la gráfica cuando el largo ($x$) adquiere valores más grandes?

Describan cómo se modifica la pendiente.

- Si se hace crecer la gráfica hacia ambos lados, ¿tocará en algún punto los ejes, es decir, en algún momento algún valor será cero? ¿Por qué?

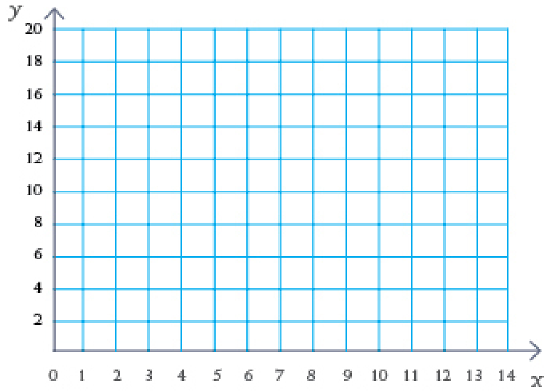
Comparen sus respuestas con las de otra pareja; si encontraron distintos puntos, agréguenlos a su gráfica. ¿Están sobre la misma gráfica? Comenten las diferencias entre una gráfica de relación lineal y una de proporcionalidad inversa.

**Utilizo las TIC**

Grafiquen en *Geogebra* las medidas del terreno que trabajaron en la actividad. Abran un archivo y en la opción "Vista" elijan "Hoja de cálculo" e ingresen los valores correspondientes de su tabla. Seleccionen "Análisis de regresión de dos datos" para trazar la gráfica correspondiente. Repitan la actividad con terrenos de diferentes áreas. ¿Encuentran alguna generalización? Escriban sus conclusiones.

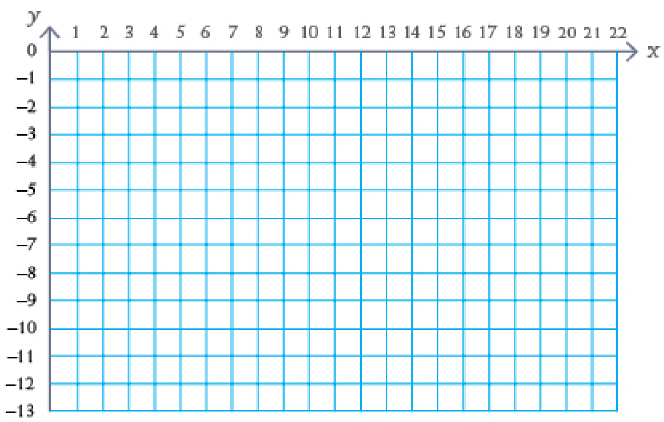
## II. Analizo la gráfica de relaciones de proporcionalidad inversa.

1. Ubica en el siguiente plano los puntos A (2 , 15), B ( 3 , 10), C (5 , 6), D ( 6, 5) y E (10 , 3). Une los puntos en orden alfabético.
   - ¿Qué relación representa la gráfica que se formó?
   - ¿Qué expresión algebraica define la relación dada?
   - Comparen los segmentos con los que unieron las diferentes coordenadas. ¿La pendiente es constante? ¿Por qué sucede lo anterior?
   - ¿Qué relación hay entre las pendientes cuando $x$ aumenta?




   - ¿Qué sucede con la pendiente cuando $x$ aumenta su valor?
   - Si consideran $x = 1$, ¿cómo es la pendiente de este punto a $x = 2$ comparada con valores de $x$ mayores?

2. Grafiquen, en el siguiente plano, la relación de proporcionalidad inversa: $y = -\frac{12}{x}$. Consideren los siguientes valores para $x$: 0.5, 1, 2, 3,…, 15 y los respectivos valores de $y$. Si el resultado es periódico, localicen un punto cercano a $y$.




   - ¿Qué características tiene la constante?
   - ¿Cómo se refleja lo anterior en la posición de la gráfica?

   Describan el comportamiento de la pendiente al unir los puntos para formar la gráfica.

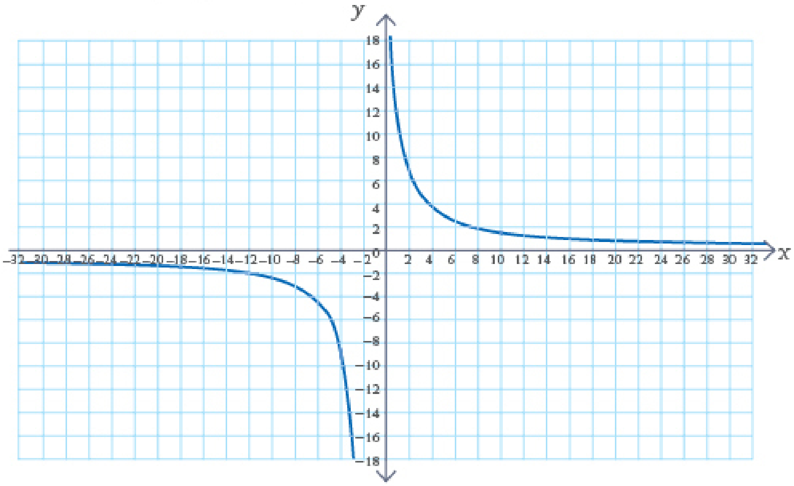
**Utilizo las TIC**

En esta página de *Geogebra* podrás cambiar el valor de la constante de proporcionalidad inversa, graficar y deslizarte por el eje $x$ para reforzar lo que aprendiste en la lección; utiliza los botones interactivos de este recurso.
cmed.mx/m262

Compara tus respuestas con las de otro integrante del grupo. Encuentren números que multiplicados den como resultado –24, establezcan la expresión algebraica y analicen su crecimiento. Utilicen *Geogebra*, cambiando las constantes de proporcionalidad y, junto con el maestro, establezcan conclusiones sobre las gráficas crecientes y decrecientes.

## III. Analizo y describo el comportamiento de gráficas de proporcionalidad inversa.

1. Observen, en parejas, la siguiente gráfica que representa una relación de proporcionalidad inversa; respondan y resuelvan las actividades.



- ¿La gráfica es creciente o decreciente? Expliquen su respuesta.

Encuentren las coordenadas $(x, y)$ de dos o tres puntos sobre la gráfica en el primer cuadrante y calculen su producto, es decir, $x \times y$. Repitan lo mismo en el tercer cuadrante del plano.

- ¿Qué valor obtuvieron en cada caso?
- ¿Qué expresión algebraica representa la gráfica?
- Si se asignan valores positivos para $x$, menores que la unidad y mayores que 32, para continuar la gráfica en ambos sentidos, ¿qué sucede en relación con los ejes $x$ y $y$?
- Si $x = 0$, ¿habría un valor correspondiente a $y$? ¿Por qué?
- ¿En algún punto de la gráfica $y$ será igual a cero? Expliquen por qué.

2. Analicen por qué la gráfica se corta y no es continua.
   - En una división, ¿qué sucede con el cociente cuando el dividendo es constante y el divisor aumenta?
   - ¿Qué sucede con el cociente si el divisor disminuye? Escriban ejemplos que justifiquen su postura.
   - ¿ El cociente puede ser cero en algún momento? ¿Por qué?
   - De acuerdo con lo anterior, ¿por qué la gráfica se corta y no es continua?

Compartan sus respuestas con las de otros compañeros. Discutan su postura sobre las razones por las que la gráfica se corta. Utilicen la expresión general $y = \frac{k}{x}$; den razones aritméticas sobre la división para justificar su postura. Si tienen dudas, busquen el apoyo del maestro para aclararlas y registren sus acuerdos.

### Tomo Nota

Dos variables, $x$ y $y$, que varían inversamente cumplen una expresión del tipo $x \times y =$ ____; si despejamos el valor de $y$ tenemos que $y =$ ____ , y corresponde a una función inversa o recíproca. La gráfica de una relación de proporcionalidad inversa se llama **hipérbola**.

## IV. Comparo las gráficas de relaciones de proporcionalidad inversa con gráficas de proporcionalidad directa y de relaciones lineales.

Trabaja de manera individual.

1. Un auto de carreras de Fórmula 1 recorre 300 km, aproximadamente, en un circuito de 5 km.

   La velocidad máxima de un automóvil de Fórmula 1 es de 320 km/h.

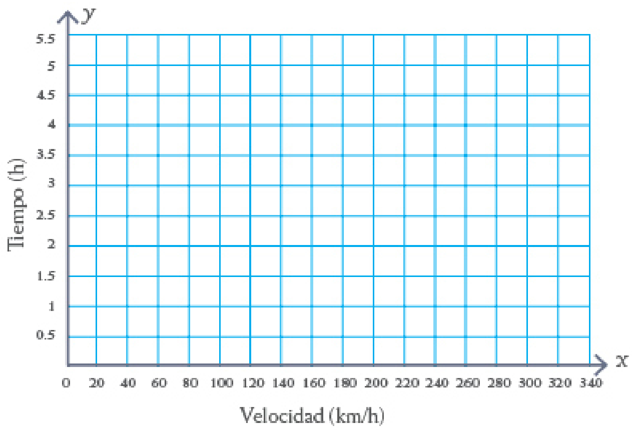
   - Si el automóvil circula a su máxima velocidad de manera constante, ¿qué distancia recorrerá en 10 minutos? ____________________________
   - ¿Qué distancia recorrerá en 20 minutos? ____________________________
   - Considerando la máxima velocidad, ¿en cuánto tiempo recorrería los 300 km?

| Tiempo (min) | Distancia recorrida km (horas) |
|---|---|
| 5 | 300 |
| 10 | |
| 15 | |
| 20 | |
| 25 | |
| 30 | |
| 35 | |

a. Imagina que el automóvil viaja a velocidad constante de 320 km/h; completa la tabla de la izquierda y traza, en tu cuaderno, la gráfica correspondiente.

b. Consideren que el automóvil realiza la carrera a las velocidades promedio que muestra la tabla, y determinen en cuánto tiempo terminaría la carrera en cada caso.

| Velocidad promedio (km/h) | Tiempo en que se recorren 300 km (horas) |
|---|---|
| 160 | |
| 180 | |
| 200 | |
| 220 | |
| 240 | |
| 260 | |
| 280 | |
| 300 | |




c. Grafica los valores de la tabla y determina la expresión algebraica que corresponde al problema: ___________

   - ¿Qué diferencia observan entre las gráficas de las relaciones anteriores? _____
   ________________________________________________________________

d. Imagina que el automóvil empieza la carrera 5 km atrás de la salida (daría una vuelta extra) por una penalización, y construye la gráfica correspondiente en el plano cartesiano, considerando una velocidad promedio de 280 km/h.

- ¿En cuánto tiempo terminaría la carrera el automóvil?
- ¿Qué expresión algebraica representa la situación?

Compara tus gráficas con un integrante del grupo. Comenten las características de las gráficas que construyeron y las diferencias entre ellas. Validen su postura con el maestro.

**Utilizo las TIC**

En un archivo de *Geogebra*, construye la gráfica de relaciones de proporcionalidad inversa. En el recuadro inferior de la pantalla "Entrada", escribe la expresión algebraica de una relación de proporcionalidad inversa y da *enter*; observa la gráfica que se forma. Identifica parejas de valores que sean parte de la gráfica.

## Practico

1. Identifica, entre las siguientes expresiones, cuáles representan una relación de proporcionalidad directa.

   a. $4x - 2y = 0$ b. $y = \frac{3}{4}x - 1$ c. $3x = -9y$
   d. $3x - 5y = 3$ e. $-3.09x + 5.2y = x$ f. $2xy = 6$

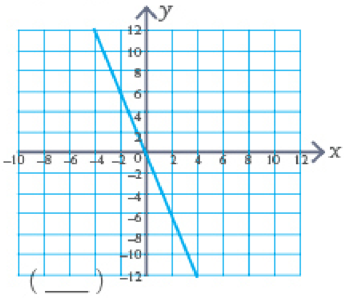
2. Identifica, entre las siguientes expresiones, cuáles corresponden a una relación de proporcionalidad inversa (o de variación inversa).

   a. $x = \frac{4}{x} - 1$ b. $3xy = -6$ c. $9x - 3y = \frac{8}{x}$
   d. $4y = \frac{1}{5}x$ e. $2x = \frac{7}{y}$ f. $7x - \frac{2}{y} = 5$

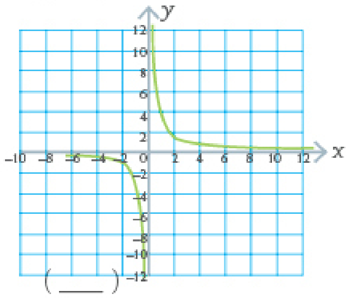
3. Relaciona la gráfica con la expresión correspondiente, escribiendo la letra dentro del paréntesis.

   a. $x = \frac{3}{y}$ b. $y = -3x$ c. $y = \frac{-2}{x}$ d. $12x - 2y = 0$

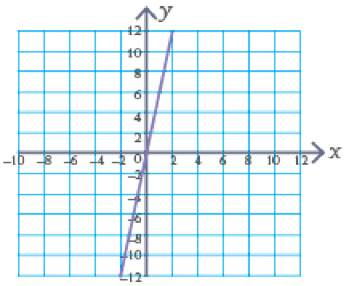
( ___ )



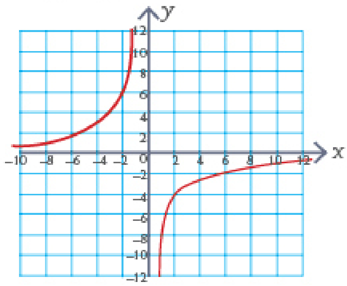
( ___ )



( ___ )



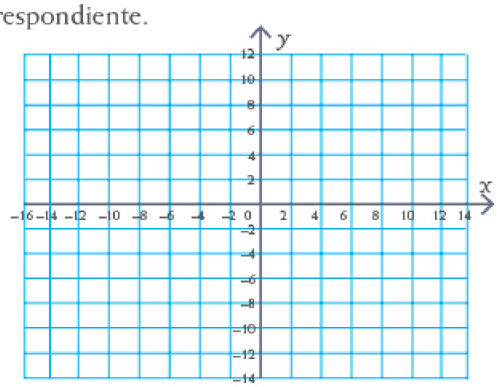
( ___ )



4. El producto de dos números es 60; asigna distintos valores a $x$ y $y$ que cumplan con la condición y completa la tabla. Después, construye la gráfica correspondiente.

   a. Escribe una pareja de números negativos que cumpla la expresión.
   b. ¿Existen parejas con un número positivo y el otro negativo que satisfagan la expresión? ¿Por qué?
   c. ¿Qué podrías decir de la gráfica antes y después del origen?

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



## Recapitulo

1. Cualquier variación lineal se puede escribir como $y = kx + b$, donde $k$ es la constante de proporcionalidad; cuando $b = 0$, la relación es de proporcionalidad directa.
2. Las gráficas de variación lineal son rectas, crecientes o decrecientes, y su pendiente es constante. En el caso de las relaciones de proporcionalidad directa, la gráfica pasa por el origen.
3. Una relación de proporcionalidad inversa se representa con la expresión $y = \frac{k}{x}$, donde $k$ es la constante.
4. La gráfica de una relación de proporcionalidad inversa es una curva, llamada hipérbola. Si $k$ es positiva, la función es decreciente; si $k$ es negativa, la función es creciente.
5. La gráfica de una función inversa no toca los ejes porque no hay valores cuyo cociente sea cero. Cuando la constante de proporcionalidad es positiva, en el primer cuadrante a medida que $x$ es mayor, la pendiente decrece y se acerca al eje $x$ (únicamente en la rama sobre el primer cuadrante) es decir, se acerca a cero. A medida que $x$ disminuye, la pendiente es mayor y la gráfica se acerca al eje $y$.

# Evalúo mi aprendizaje

Itacate

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Determina si las siguiente relación entre las variables es directa o inversa; justifica tu respuesta.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 7 |
| 3 | 10.5 |
| 4 | 14 |

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 75 |
| 2 | 32.5 |
| 3 | 25 |

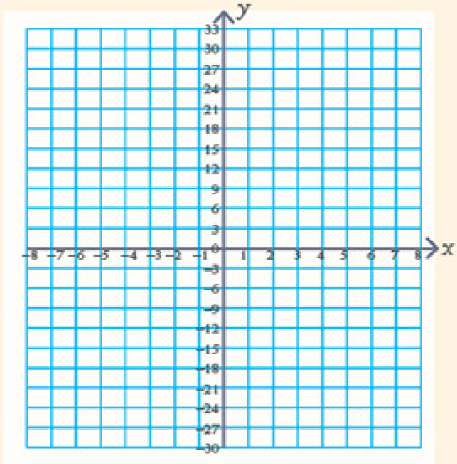
**2.** Si 9 y 3 son inversamente proporcionales, encuentra la expresión en $x$ y $y$ que represente la proporción; completa la tabla y grafica.

Expresión: ____________________

______________________________

______________________________

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| –3 | |
| –2 | |
| –1 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |




**3.** Completa los enunciados y las expresiones de cada inciso:

**a.** Si $a$ varía ______________ con $b$, entonces $b$ _____ ________________ proporcionalmente con $a$, y las constantes son ________________.

Si $a = kb$ / $x = 3y$ entonces $b = \frac{a}{\_\_}$ / $y = \frac{x}{\_\_}$

**b.** Si $a$ y $b$ tienen una variación ______________, entonces $b$ y $a$ son inversamente ________________ y tienen la ____________ constante de proporcionalidad.

Si $a = \frac{k}{b}$ / $y = \frac{20}{x}$ entonces $b = \frac{\_\_}{a}$ / $x = \frac{\_\_}{y}$

**4.** Una empresa pagará $5 000.00 para que pinten sus oficinas. El dinero se repartirá en partes iguales entre el número de pintores que realicen el trabajo. Completa la tabla.

| Número de pintores (x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dinero que recibe cada uno $ (y) | | | | | | |

- ¿Qué tipo de relación representa la situación?

**a.** Escribe la expresión algebraica que corresponda a esta función.

**b.** Identifica los puntos correspondientes y únelos para elaborar la gráfica.

- ¿La gráfica es creciente o decreciente?
- En el contexto del problema, ¿habría un valor para $x$ correspondiente a $y = 2\,000$? ¿Por qué?

# Logro ir **más allá**

1. Juan decidió trabajar en la granja de su tío Germán durante las vacaciones. Allí observó que tres vacas se tomaban, en un día, toda el agua de un bebedero lleno.
   - ¿Cuántos bebederos, iguales y llenos, se necesitarían para dar de beber a 9 vacas en un día?

   a. Juan quiere saber si el alimento que tienen para las vacas es suficiente para terminar, sin faltante, la semana.
      - Si se necesitan dos pacas y media para alimentar 3 vacas en una semana, ¿cuántas pacas se necesitan para alimentar 24 vacas en una semana?

   b. Juan y su tío ordeñan, entre los dos, 16 vacas en 4 horas.
      - ¿Cuánto tiempo tardarán si dos amigos deciden acompañarlos y ordeñar al mismo ritmo?

   c. Cuando Juan termina su trabajo en la granja, se va caminando a su casa a una velocidad de 4 km/h y tarda 75 minutos en llegar.
      - ¿Cuánto tardaría en llegar si decide irse en bicicleta a 10 km/h?

   d. El tío de Juan quiere utilizar 245 L de leche entera para elaborar queso y mantequilla. Él sabe que para obtener un kg de queso se necesitan 7 L de leche descremada, y que de 100 L de leche entera se obtienen 9 litros de crema para elaborar 4.4 kg de mantequilla.
      - ¿Cuántos quesos y cuántas mantequillas podría elaborar?

2. Escribe qué tipo de proporción utilizaste para contestar cada una de las preguntas.

L24

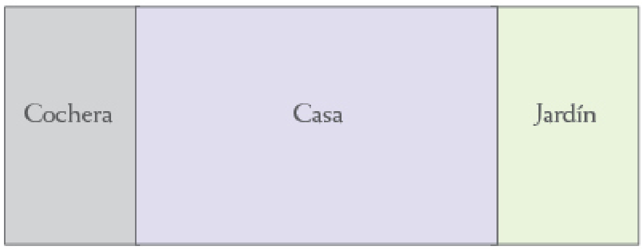
# Expresiones algebraicas en modelos **geométricos**

El perímetro y el área son dos magnitudes esenciales que permiten cuantificar el espacio físico; ¿recuerdas en qué circunstancias has tenido que hacer uso de ellas? Estos conceptos se utilizan en múltiples disciplinas, no sólo en matemáticas. En cursos anteriores has aprendido que el perímetro es la medida de la longitud alrededor de una figura y que el área nos permite determinar la superficie que ocupa dicha figura.

Exploro

**Describo los procedimientos para calcular el área y el perímetro de figuras geométricas y represento la expresión correspondiente.**

Sergio tiene un terreno de forma rectangular en el que construirá su casa. La distribución de los espacios será de la siguiente manera:




1. Analiza la imagen anterior y responde.
   - ¿Qué forma o figura geométrica tiene cada espacio de la casa?

   Describe el procedimiento para calcular la superficie que ocupará cada espacio del terreno.

2. Asigna y coloca en la imagen una literal para cada longitud, y escribe la expresión que representa el área de cada espacio. Recuerda que dos longitudes diferentes no pueden representarse con la misma literal. Considera que el jardín y la cochera tiene el mismo largo.

   Cochera: ____________ Casa: ____________ Jardín: ____________

   - ¿Qué expresión representa el perímetro del terreno?
   - ¿Es la única manera de representar el perímetro o hay otra? ¿Cuál?
   - ¿Qué expresión representa el área de todo el terreno?

Compara tus respuestas con las del grupo. Sin importar las literales que usaron, verifiquen que todas sus expresiones sean correctas. Si todos escribieron las mismas expresiones, busquen otra forma de representar el área y el perímetro del terreno y valídenla.

Descubro y construyo

## I. Identifico y represento de diferentes maneras el perímetro y el área de figuras geométricas.

En el módulo anterior aprendiste a representar expresiones algebraicas equivalentes a partir de sucesiones; en esta lección lo harás a partir de figuras geométricas.

1. En parejas, identifiquen y subrayen las expresiones algebraicas que representan el perímetro de cada figura.

Figura 1

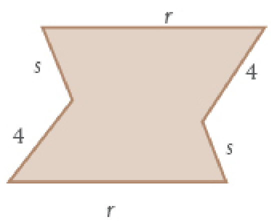
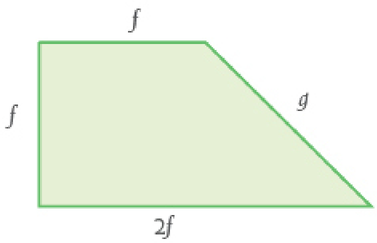



Figura 2



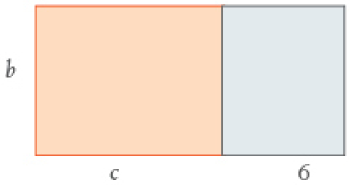

| | |
|---|---|
| $8 + 2r + 2s$ | $2(4) + s + r$ |
| $2(4 + r + s)$ | $8 + 2(s + r)$ |
| $2rs + 8$ | |

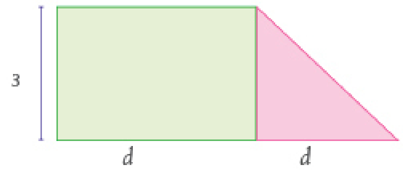
| | |
|---|---|
| $2f + 2(f + g)$ | $4f + g$ |
| $2f + f + f + g$ | $2(2f + f) + g$ |
| $2f + 2(f) + g$ | |

2. Consideren que $r = 8$, $s = 2.5$, $f = 6$ y $g = 8.6$, y sustituyan las literales por estos valores en las expresiones que eligieron, para validar sus respuestas.
   - ¿En todas obtuvieron el mismo resultado?
   - ¿Cuál es el perímetro de cada figura?

   Validen que en las expresiones que no representan el perímetro de las figuras, la igualdad anterior no se cumple.

3. Elijan las expresiones que representan el área de las siguientes figuras.



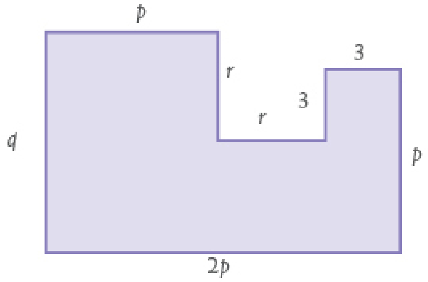



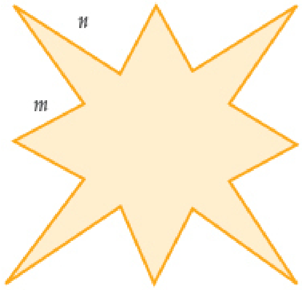

| | |
|---|---|
| $bc + 6b$ | $b + 6c$ |
| $b(c + 6)$ | $6(b + c)$ |

| | |
|---|---|
| $\frac{(2d + d) \times 3}{2}$ | $\frac{3 \times d + (3 \times d)}{2}$ |
| $\frac{3d + 3d}{2}$ | $\frac{3\,(d + d)}{2}$ |

Expresa libremente tus ideas y compáralas con las de distintos integrantes del grupo. Si no eligieron las mismas expresiones, sustituyan las literales por valores y calculen el área de cada figura para comprobar si en todos los casos obtienen el mismo resultado.

4. Escriban de tres maneras diferentes el perímetro de las siguientes figuras.

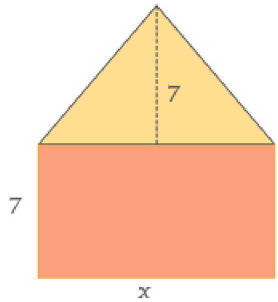


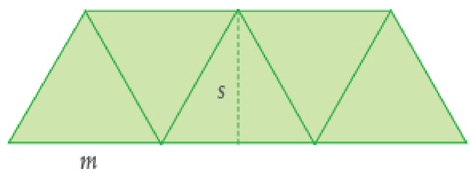




- Si $p = 6$, $q = 6.5$ y $r = 4.5$, ¿cuál es el perímetro de la primera figura?
- Si $n = 7.2$ y $m = 4.6$, ¿cuál es el perímetro de la segunda figura?

5. Calculen, con los valores anteriores, el perímetro en cada una de las expresiones algebraicas que escribieron, con el fin de validarlas. En caso de que no coincidan los resultados, revisen sus expresiones, detecten el error y corrijan.

6. Ahora, escriban tres expresiones algebraicas que representen el área de cada una de las siguientes figuras.




- ¿Cuál es el área de la primera figura si $x$ vale 11?
- Si $m = 6$ y $s = 4.2$, ¿cuál es el área de la segunda figura?

Validen sus respuestas con las de otros compañeros. Debatan sobre las estrategias que pueden seguir para determinar si dos expresiones algebraicas son equivalentes. Registren sus acuerdos.

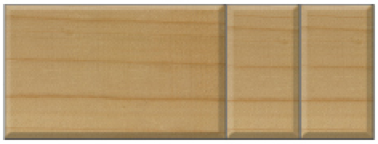
**II. Represento expresiones algebraicas equivalentes a partir de modelos geométricos.**

Samuel le compró a sus hijos un juego con piezas de madera para formar figuras. El rectángulo chico tiene la misma altura del rectángulo grande y de base 1 unidad., como se observa en el dibujo.

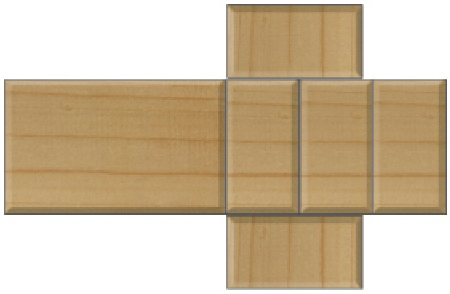
1. Asignen, en equipo, una literal a cada dimensión y escriban una expresión que represente el área de cada figura.

 ____________  ____________

2. Escriban de dos maneras diferentes el área y el perímetro de las siguientes figuras:



P = ____________
A = ____________



P = ____________
A = ____________

3. Consideren la siguiente figura que hicieron los hijos de Samuel y respondan.

- ¿Qué expresión representa la base de la figura?
- ¿Qué expresión representa la altura del rectángulo?
- ¿Qué expresión representa el área total de la figura?
- ¿Qué expresión corresponde a la suma del área de las figuras que forman la construcción?

### Tomo Nota

El área total de una figura puede representarse como la suma del área de las figuras que la forman. Por ejemplo, el área de un rectángulo cuya base mide: $x + 2y$ su altura es igual a $y$, aplicando la fórmula del rectángulo tenemos que A = (____ + ____)____, que es igual a ____ + ____.

4. Las siguientes figuras se hicieron con el mismo juego de piezas de madera. Escriban la expresión algebraica que represente el área de cada figura, como la suma de las áreas de las figuras que la forman.

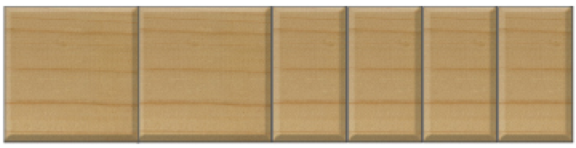
a. ______________________ b. ______________________ c. ______________________

- ¿Cómo pueden comprobar que las expresiones algebraicas correspondientes son equivalentes? Expliquen. ______________________

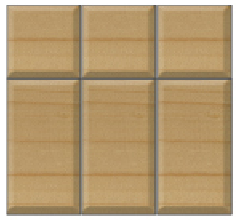
Asignen valores numéricos a sus literales y calculen el área de cada figura para validar la equivalencia de sus expresiones.

- ¿Qué relación hay entre las expresiones algebraicas del área de estas figuras y la de la figura de la página anterior? Justifiquen su respuesta.

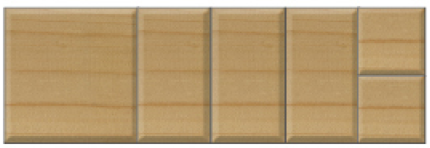
5. Escriban dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el perímetro de las siguientes figuras. Consideren las literales que usaron antes y que el cuadrado pequeño mide 1 unidad por lado.



a. ______________________



b. ______________________



c. ______________________

d. ______________________

- ¿Cómo pueden justificar que las expresiones que escribieron son equivalentes?

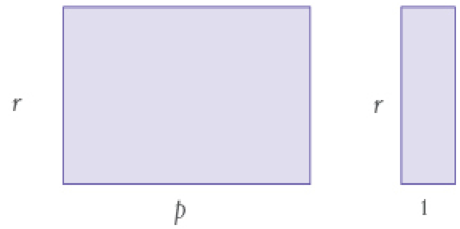
## Tomo Nota

Para validar si dos expresiones algebraicas son equivalentes, pueden usarse figuras geométricas para representarlas..

Reconozcan las habilidades de sus compañeros y comparen sus expresiones algebraicas con las de otros equipos. Si obtuvieron diferentes expresiones, sustituyan las literales por valores numéricos y calculen el área de cada figura; si los resultados son diferentes, revisen sus expresiones para detectar el error. Verbalicen cómo encontraron sus expresiones algebraicas y escuchen los argumentos de todos. Juntos lleguen a un acuerdo.

## III. Represento expresiones algebraicas con modelos geométrico.

1. Considera las siguientes figuras y representa con ellas un rectángulo cuya área corresponda a las siguientes expresiones algebraicas. Después, escribe una expresión equivalente a cada expresión dada.



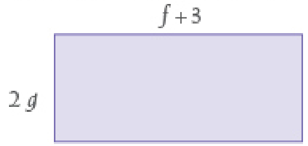

a. $r(p + 3) =$ ____________ b. $2r(p) + 6r =$ ____________

c. $5r(p + 1) =$ ____________ d. $3\,rp + r =$ ____________

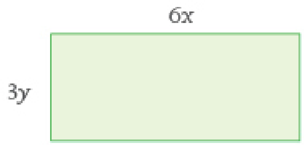
Valida tus modelos geométricos en equipo. ¿Tuvieron dudas para representar las ecuaciones con modelos geométricos? ¿Plantearon sus dudas? En grupo, concluyan sobre las ventajas de representar expresiones algebraicas equivalentes con modelos geométricos.

### Practico

1. Escribe, de dos maneras diferentes, la expresión algebraica que representa el área y el perímetro de los siguientes rectángulos.




A: ____________________
P: ____________________




A: ____________________
P: ____________________

2. Escribe una expresión equivalente a cada expresión algebraica.

a. $6x + 2y =$ ____________ b. $3(s + 5) =$ ____________
c. $3(2a + b) =$ ____________ d. $4 + 4c =$ ____________

### Tomo Nota

Las **expresiones algebraicas equivalentes** se conocen como identidades matemáticas que representan una igualdad, la cual se cumple para cualquier valor que adquieran las variables. Por ejemplo, $x(2 + y) = 2x + xy$ representa una identidad. Si $x = 4$ y $y = 6$, entonces se cumple que: $x(2 + y) =$ ____ y $2x + xy =$ ____.

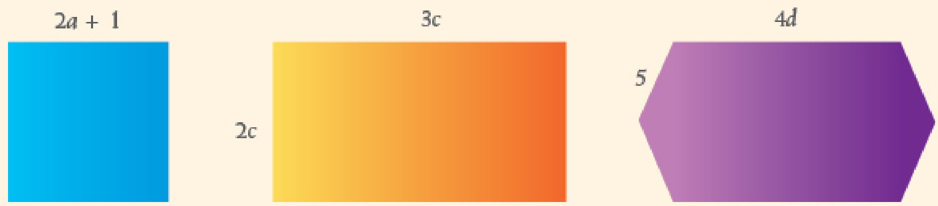
# Recapitulo

1. Dos expresiones algebraicas son equivalentes si al asignarles valores numéricos a las literales o a las incógnitas, se obtiene el mismo resultado.
2. Algunas expresiones algebraicas equivalentes pueden representarse usando modelos geométricos.
3. Las expresiones algebraicas equivalentes se conocen como identidades matemáticas que representan una igualdad que se cumple para cualquier valor que adquieran las variables.

# Evalúo mi aprendizaje

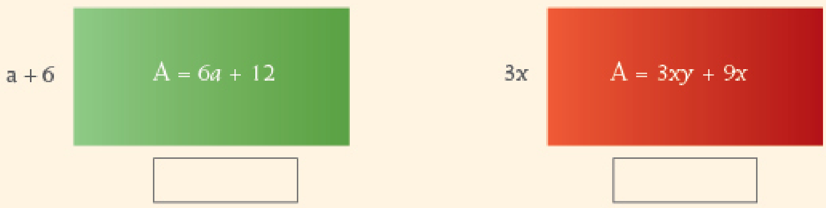
Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Subraya las expresiones algebraicas que representen el perímetro de las siguientes figuras.




| | | |
|---|---|---|
| $4(2a + 1)$ | $2(3c + 2c)$ | $2(4d) + 20$ |
| $8a + 1$ | $6c + 4c$ | $8d + 5 \times 4$ |
| $4a + 4a + 4$ | $(2c \times 3c)2$ | $2(4d + 5)$ |
| $4 + 8a$ | $2c + 2c + 3c + 3c$ | $4d \times 4 \times 5$ |

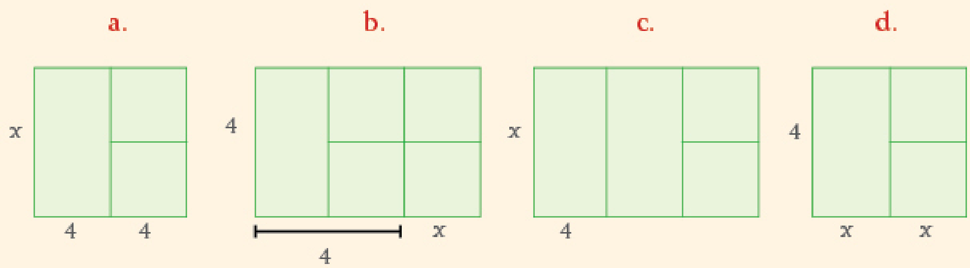
**2.** Anota la medida que falta en los siguientes rectángulos.




**3.** Dibuja las siguientes figuras según lo que se pide en cada inciso.

a. Un figura geométrica cuyo perímetro sea igual a $8m + 4$.
b. Un rectángulo cuya área pueda representarse con la expresión: $3x + y$.

**4.** ¿En cuál de las siguientes figuras el área corresponde a la expresión algebraica $4x + 16$?



# Logro ir **más allá**

Seguramente has oído hablar de la **proporción áurea** o número áureo. Este número se representa con la letra griega phi ($\Phi$) y tiene una expansión decimal infinita, no periódica: $\Phi = 1.6180339 \ldots$

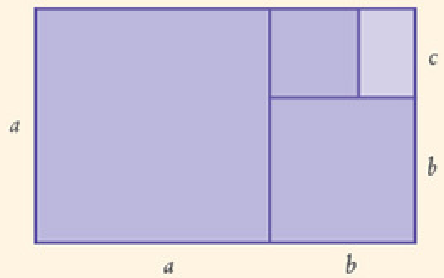
Un rectángulo áureo es aquel en el cual la proporción (o razón) entre su lado más largo y su lado más corto es el número $\Phi$. Todos los rectángulos áureos tienen la siguiente propiedad: si se dividen en un cuadrado (de lado igual al lado más corto del rectángulo) y en un rectángulo más pequeño, este rectángulo más pequeño resulta ser nuevamente un rectángulo áureo.

Esta forma de dividir un rectángulo áureo se puede continuar indefinidamente, como se muestra en la siguiente imagen del Partenón en Atenas, Grecia:


$$\frac{a+b}{a} = 1.6180339 \ldots$$

En la Grecia antigua se usó la proporción áurea (o divina proporción) como modelo para construir los templos. Muestra de ello es el famoso Partenón; la relación entre las partes, el techo y las columnas tiene una proporción áurea, como se muestra en los trazos sobre la fotografía. Platón consideraba que la proporción áurea era la mejor de todas las relaciones matemáticas y la llave a la física del cosmos.

1. Analicen en parejas el rectángulo áureo y respondan:
   - ¿En cuántas formas distintas podrían representar el área del rectángulo áureo? Den un ejemplo y compárenlo con el de otras parejas.
   - Escriban de dos maneras diferentes el perímetro del rectángulo áureo.
   - ¿Cuáles son el área y el perímetro del rectángulo de base $b$ y altura $b + c$?
   - ¿Qué diferencia hay entre el perímetro del rectángulo áureo mayor y el siguiente rectángulo áureo que se forma?




2. Busquen dos medidas enteras, aproximadas, que cumplan con las medidas de un rectángulo áureo; sustituyan las literales por esos valores y comprueben sus respuestas.

L25

# Perímetro y área de polígonos **regulares**

Un polígono es una figura plana cerrada, formada por tres o más lados, que puede ser regular (lados y ángulos iguales entre sí) o irregular. La palabra **polígono** es un término de origen griego cuyo significado es: *poli* (muchos) y *gono* (ángulos).

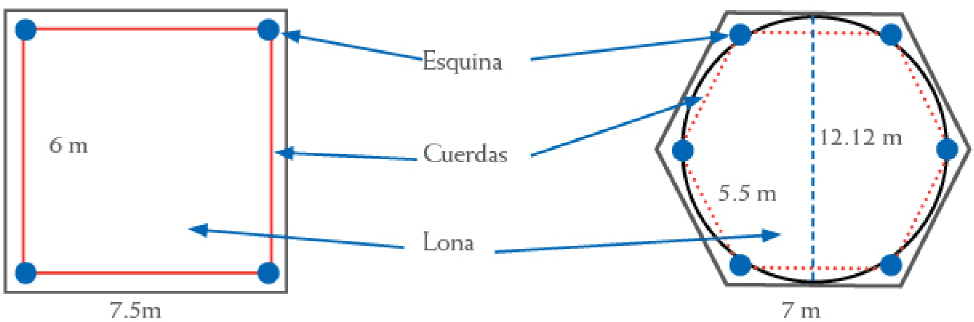
Exploro

**Calculo el perímetro de polígonos regulares y aplico estrategias propias para calcular su área.**

La lucha libre es una tradición popular que llegó a México en 1863, durante la intervención francesa. La lucha libre mexicana es conocida en el mundo por su particular técnica, sus saltos peligrosos fuera del ring, sus acrobacias, sus reglas y el folclor propio de nuestro país, como las máscaras, que cobran un gran valor en esta disciplina.

Las siguientes imágenes corresponden a dos tipos de ring en los que se practica la lucha libre: el tradicional cuadrilátero y el llamado hexadrilátero, por su forma de hexágono regular, el cual se construyó sobre un círculo como se muestra en la imagen.

1. Observa las medidas de cada ring y responde.

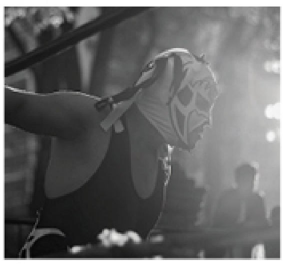



- Si en cada ring se colocan tres cuerdas en cada lado, ¿cuál es la longitud total de las cuerdas que corresponden a cada ring? Explica cómo obtuviste las medidas.
- ¿Cuál es el área o superficie que ocupa la lona en el cuadrilátero?
- ¿Cuál es el perímetro del círculo sobre el que se encuentra el hexadrilátero? ¿Cómo lo determinaste? ¿Cuál es el área del hexadrilátero?; ¿qué hiciste para determinarlo?

Compara tus respuestas sobre el hexadrilátero con otros integrantes del grupo . ¿Todos siguieron el mismo procedimiento? ¿Obtuvieron los mismos resultados? ¿Cómo pueden determinar el área que ocupa la lona en el hexadrilátero, a partir de las medidas que se muestran? Sin importar las literales que usaron, verifiquen que todas sus expresiones sean correctas.

**Leo +**

Ingresa a la página: cmed.mx/m266, donde encontrarás más información sobre el origen y las características de la lucha libre mexicana. Comparte qué te sorprendió más de lo que leíste y si es valioso para ti saber más acerca de esta disciplina.



Función de lucha libre callejera durante el festejo anual 2017 en el pueblo de la Candelaria, Coyoacán, Ciudad de México.

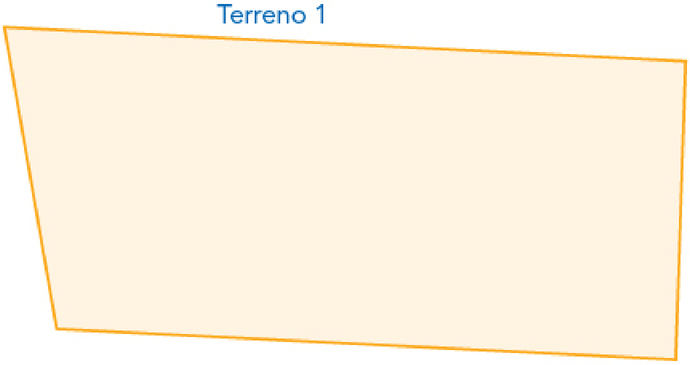
Descubro y construyo

**I. Calculo el área de figuras compuestas mediante diferentes estrategias.**

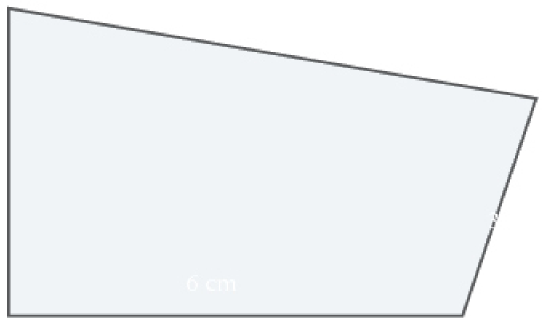
Las siguientes figuras representan el plano, hecho a escala, de dos terrenos que Antonio quiere vender. Para ello, necesita conocer su área.

1. Midan, en parejas, cada lado de los terrenos utilizando la regla; anoten las medidas reales de cada terreno y determinen su perímetro. Consideren que cada centímetro representa un metro real: Escala 1:100

Terreno 1



Terreno 2



- ¿Qué procedimiento piensan seguir para calcular el área de cada terreno? Ahora utilícenlo para determinar el área de los terrenos.

Terreno 1: __________ Terreno 2: __________

Comparen sus resultados y estrategias con los de otra pareja. Discutan la eficiencia de las mismas y comenten qué resultado es más confiable.

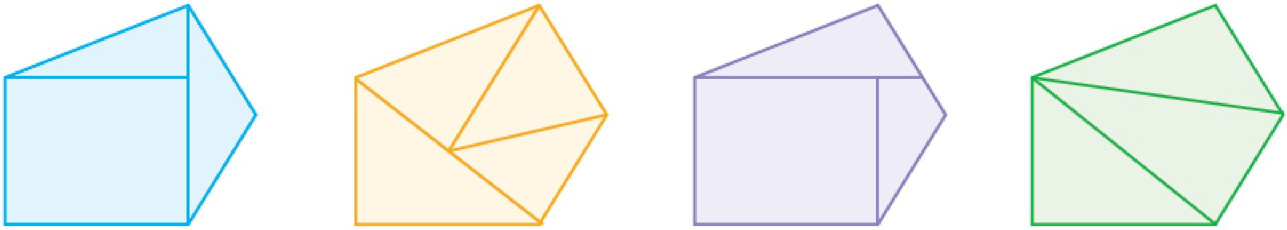
2. Continúen trabajando en parejas. Analicen la siguiente información y respondan. Para calcular el área, Antonio propuso dividir cada figura en cuadrados de 1 cm de lado; así cada uno representaría 1 $m^2$, y bastaría con contar los cuadrados para calcular el área.
   - ¿Siguieron este procedimiento? ¿Qué dificultades observaron?
   - ¿Se obtiene la medida exacta? ¿Por qué sí o por qué no?

   Miguel, el hijo de Antonio, le propuso dividir los terrenos en otras figuras y calcular el área utilizando la fórmula correspondiente.
   - ¿Siguieron este procedimiento? ¿Por qué es adecuado?
   - ¿Cuál es el número mínimo de figuras en que se puede dividir cada terreno de tal manera que, para calcular el área de cada figura, se conozca la fórmula?
3. Dividan las figuras, tomen las medidas necesarias y vuelvan a calcular el área siguiendo este procedimiento.

Terreno 1: __________ Terreno 2: __________

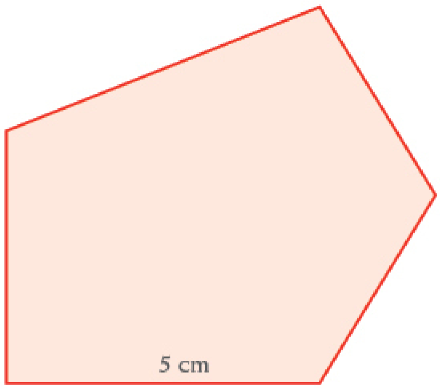
Comparen estos resultados con los que obtuvieron antes. Si no son los mismos, revisen sus procedimientos con el grupo. En caso de no llegar a un acuerdo, detecten y corrijan posibles errores con el apoyo del maestro.

4. Observen la forma en que diferentes estudiantes dividieron una figura para calcular su área. Después, respondan.



Pedro Diana Alan Itzel

¿Qué subdivisiones usarían para calcular el área de la figura? Expliquen por qué.



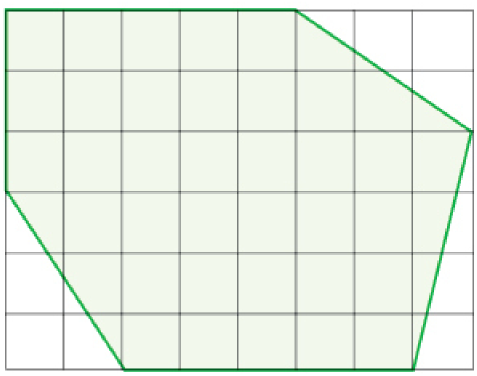

5. La siguiente figura representa las medidas reales del pentágono anterior. Cada quien elija una de las subdivisiones anteriores, dividan su figura, tomen las medidas con la regla y calculen el perímetro y el área.

Perímetro = ____________

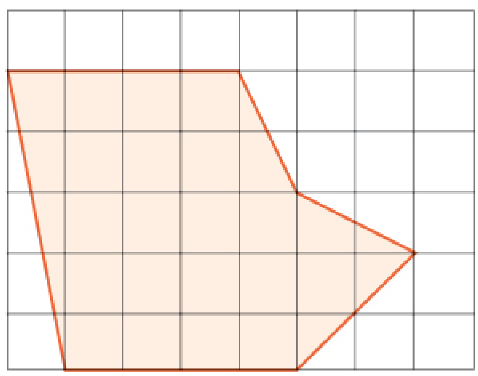
Área = ____________

6. Calculen el área de los siguientes polígonos irregulares. Consideren que cada cuadrado mide un centímetro por lado.

**a.**



**b.**



Área (**a**) = ____________ Área (**b**) = ____________

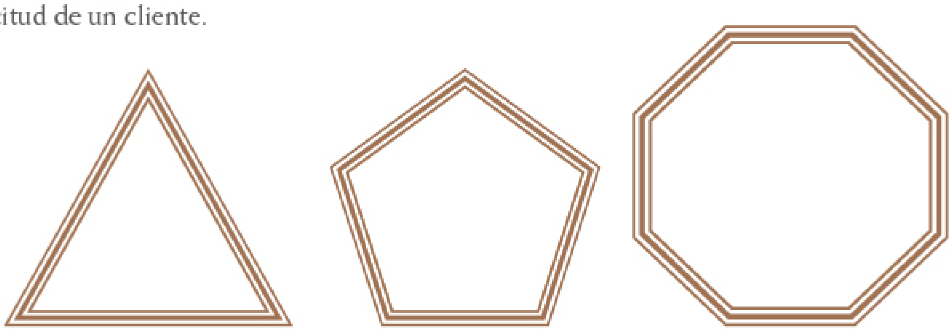
En grupo, revisen sus respuestas. Expresen libremente sus ideas y respeten las posturas de sus compañeros. Después, discutan y registren sus acuerdos sobre las estrategias que pueden seguir para calcular el área de polígonos irregulares.

### Tomo Nota

Para calcular el área de polígonos irregulares, éstos se pueden ______________ en figuras cuya fórmula se conoce, por ejemplo ____________________ o, ____________________.

## II. Calculo el perímetro de polígonos regulares y establezco la fórmula para calcularlo.

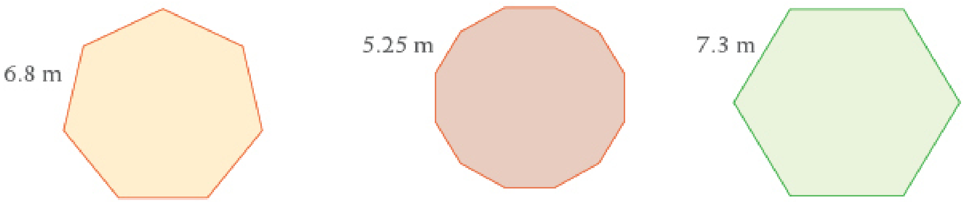
Carlos contruyó los siguientes marcos de madera para colocar espejos en ellos, a solicitud de un cliente.



1. Toma las medidas necesarias y calcula la cantidad de metros de madera que necesitó Carlos para hacer cada marco. Considera que 1 cm en la imagen corresponde a 10 cm reales.
   - Triángulo: ________
   - Pentágono: ________
   - Octágono: ________

   - ¿Qué tienen en común los tres marcos?
   - ¿Qué hiciste en cada caso para determinar la cantidad de madera utilizada?
   - ¿El procedimiento fue el mismo o cambió según la forma del marco?
   - ¿Cómo pueden obtener la medida del perímetro de un marco con forma de decágono regular?
   - Si el polígono es regular de *n* lados, ¿cómo se determinaría su perímetro?
   - ¿Qué fórmula permite calcular el perímetro de cualquier polígono regular?

2. Aplica la fórmula que estableciste y calcula el perímetro de los siguientes polígonos regulares.



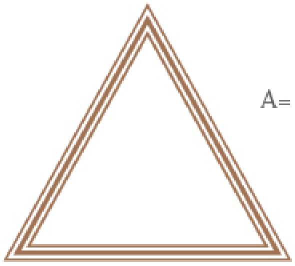

P = ______________ P = ______________ P = ______________

Valida tu fórmula y respuestas con las de otros compañeros. Si existen diferencias, coméntenlas y traten de aclararlas con argumentos y respetando la opinión de cada quien.

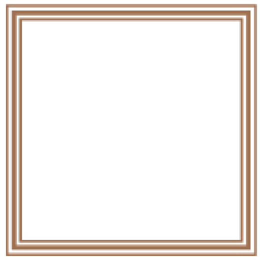
## III. Calculo el área de polígonos regulares mediante diversas estrategias y establezco la fórmula correspondiente.

Retomemos los marcos de Carlos, pero ahora para calcular la superficie o área que ocupan los espejos que colocará en cada marco.

1. En parejas, tomen las medidas necesarias y calculen el área de cada marco. Recuerden que cada centímetro representa 10 cm reales. Por ello, primero conviertan las medidas a las reales y después calculen las áreas.

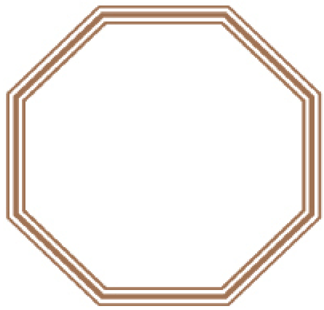


A= __________



A= __________

A= __________



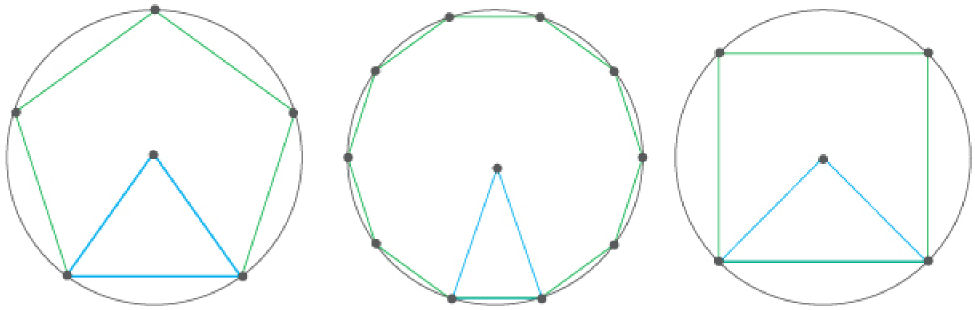
A= __________

- ¿Qué hicieron para calcular el área del triángulo y el cuadrado?
- ¿Qué hicieron para calcular el área del pentágono y el octágono?
- ¿Hay alguna fórmula, como en el caso del triángulo y el cuadrado, que permita calcular el área del pentágono y el octágono regulares? Expliquen su respuesta.

Comparen sus expresiones algebraicas con las de otros equipos. Si obtuvieron diferentes expresiones, sustituyan las literales por valores numéricos y calculen el área de cada figura; si los resultados son diferentes, revisen sus expresiones para detectar el error y corríjanlo.

La maestra de Ximena les pidió como tarea trazar tres polígonos regulares y calcular su área. Ximena trazó tres polígonos regulares inscritos en una circunferencia, a partir de la medida de sus ángulos centrales, como se muestra.

1. Analicen en parejas las figuras y resuelvan.



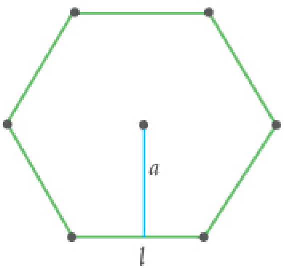
- ¿Qué relación hay entre el número de lados de cada figura y el número de triángulos que se pueden formar a partir de su ángulo central?
- ¿En cuántos triángulos iguales se puede dividir cada polígono?

Tracen la altura de cada triángulo, midan la base y la altura y calculen su área.

- ¿Cómo pueden obtener el área de cada polígono a partir de los triángulos anteriores?
- Calculen y anoten dentro de cada figura la medida de su área.

2. Describan un procedimiento para calcular el área de un polígono regular.

3. Analicen el siguiente hexágono regular y respondan.




- Según lo anterior, ¿en cuántos triángulos se puede dividir el hexágono?
- ¿Cuál es su perímetro? ¿Cuánto mide su **apotema**?

Escriban la expresión que representa el área de cada triángulo que se forma a partir del ángulo central.

Escriban el área total como la suma del área de los triángulos y simplifíquenla.

**GLOSARIO**

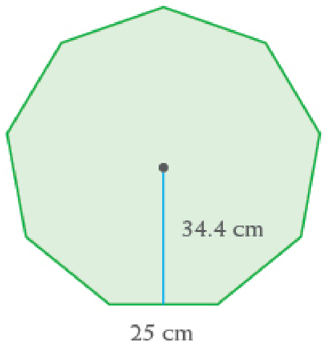
**Apotema.** Distancia del centro de un polígono regular al punto medio de un lado.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Discutan los procedimientos y establezcan una fórmula para calcular el área de polígonos regulares a partir del perímetro y la apotema. Apliquen la fórmula para calcular el área de los marcos de madera que se trabajaron en la página anterior.

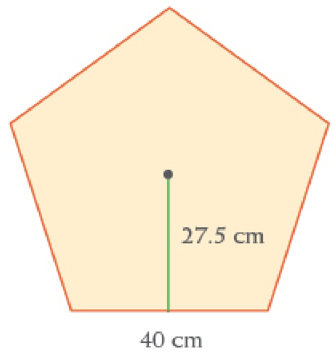
## IV. Resuelvo problemas relacionados con el cálculo del perímetro y el área de polígonos regulares.

Resuelvan en pareja los siguientes problemas.

1. Consideren la medida de los lados como $l$, el número de lados como $n$ y la apotema como $a$, y escriban las fórmulas del área y el perímetro de los polígonos regulares. Después, calculen el perímetro y el área de los siguientes polígonos, aplicando las fórmulas.




Fórmulas:
P = ________
A = ________

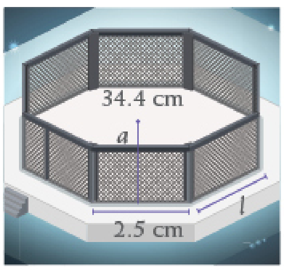



Procedimiento:

P = ____________________
A = ____________________

Procedimiento:

P = ____________________
A = ____________________




2. Las artes marciales mixtas son una variante de la lucha libre. Las peleas de esta modalidad se llevan a cabo dentro de un octágono regular, cercado por rejas que miden 9.7 m de largo y 1.82 m de alto, como se puede observar en la imagen.

- ¿Cuál es el área que ocupa cada reja?
- ¿Cuál es la longitud de las rejas que cubren el octágono?
- Si la apotema del octágono mide 11.7 m, ¿cuál es el área de la arena?

3. Analicen la información y respondan.

- Si se conocen el área de un polígono regular de $n$ lados y la apotema ($a$), ¿cómo se puede determinar el perímetro? Represéntenlo con sus palabras y algebraicamente.

- ¿Cómo calcular la apotema si se conocen el área y la medida de los lados?

**Utilizo las TIC**

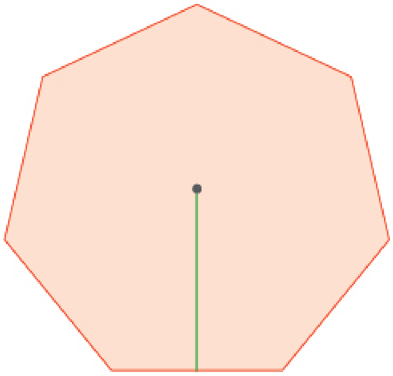
En *Geogebra*, traza polígonos regulares. Con la opción "Punto medio" localiza el centro de la figura y el de uno de sus lados; traza un segmento que represente su apotema. Con la herramienta "Distancia o Longitud", determina el perímetro y la apotema de la figura y calcula su área. Valida tu respuesta con la herramienta "Área".

4. Irma compró un vidrio con forma de hexágono regular para cubrir su mesa. El vidrio tiene un área de 2.295 $m^2$ y un perímetro de 5.64 m.
   - ¿Cuántos centímetros mide la apotema del vidrio?
   - ¿Cuántos metros miden los lados del vidrio?
   - ¿Qué hicieron para determinar la medida de la apotema?
5. Un polígono regular de 12 lados tiene un área de 6 990 $cm^2$ y su apotema mide 46.6 cm.
   - ¿Cuánto mide el perímetro del polígono?
   - ¿Cuánto miden sus lados?

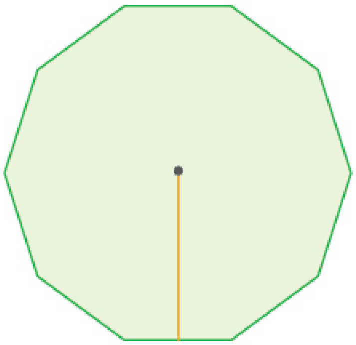
Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros compañeros. Comenten la relación entre los elementos de un polígono regular (lados, apotema, perímetro y área) y cómo se puede obtener uno a partir de los otros utilizando las fórmulas correspondientes. Registren sus acuerdos.

## Practico

1. Mide y calcula el perímetro y el área de los siguientes polígonos regulares.



P = ______________
A = ______________



P = ______________
A = ______________

2. Calcula los valores que faltan y completa la siguiente tabla.

| Polígono regular | Lados (cm) | Apotema (cm) | Perímetro (cm) | Área ($cm^2$) |
|---|---|---|---|---|
| Pentágono | 28 | 19.2 | | |
| Octágono | | 21.7 | | 1 562.4 |
| Triángulo | 35 | 10.1 | | |
| Hexágono | 12 | | | 374.4 |

## Tomo Nota

El perímetro de un polígono es igual a la __________ de la medida de sus lados. Si el polígono es regular y tiene *n* lados que miden *l*, entonces la fórmula del perímetro es P = ____. Para calcular el área (A), el __________ se multiplica por la __________ y el resultado se divide entre ____, es decir, A = ——.

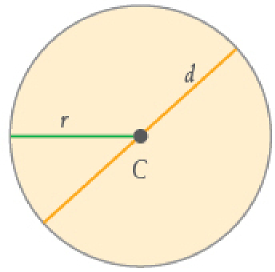
## Utilizo las TIC

Después de resolver los ejercicios de *Practico*, ingresa a: cmed.mx/m267, selecciona cada figura y manipula el deslizador para que se despliegue el polígono inscrito. Valida la fórmula que encontraste para calcular el área de polígonos regulares.

Si te interesa saber más y practicar, selecciona otras actividades en el menú de la izquierda y disfruta de esta poderosa herramienta mientras aprendes.

L26

# Área del círculo

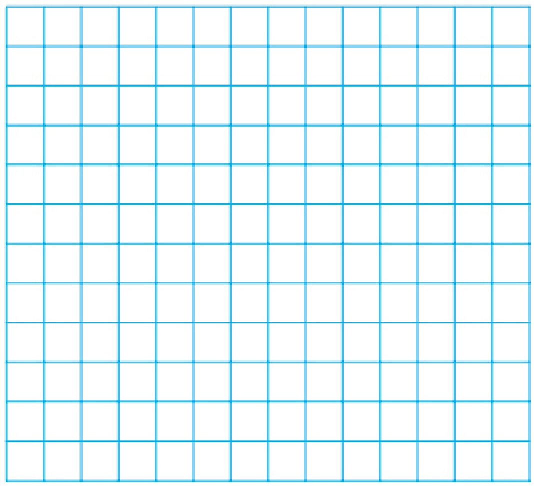



Una circunferencia es una curva cerrada plana en la que todos los puntos están a la misma distancia del centro (C) de la figura. Un círculo es una superficie plana que se encuentra limitada por una circunferencia.

Exploro

**Trazo un círculo y aproximo su área por medio de cuadrados.**

1. En la siguiente cuadrícula, traza un cuadrado de 5 unidades por lado.
2. Después, con centro en un vértice del cuadrado, traza una circunferencia con radio igual a la longitud del lado del cuadrado, que pase por otro de sus vértices.



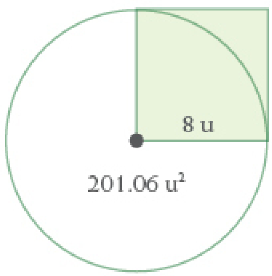
- Calcula el perímetro y el área del cuadrado:
  P = _______________ A = _______________
- ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?
- ¿Qué parte del círculo cubre el cuadrado?
- ¿Cuántos cuadrados de lado 1 estimas que cubren el sector circular?
- ¿Cuántas unidades cuadradas mide aproximadamente el área del círculo?
- ¿Cómo lo determinaste?
- ¿Aproximadamente cuántos cuadrados de 5 unidades por lado se necesitan para cubrir el área del círculo? Explica tu respuesta.

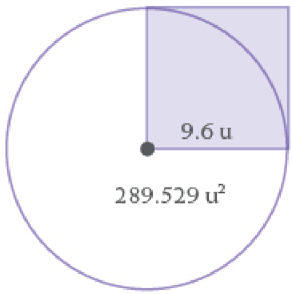
Compara tus respuestas con las de otros integrantes del grupo. En grupo discutan: ¿El área del cuadrado permite obtener el área del círculo? ¿Hay alguna relación entre el área de un cuadrado y un círculo de radio igual a la longitud de sus lados?

**Descubro y construyo**

**I. Identifico la relación entre el área de un círculo y el número de cuadrados que se necesitan para cubrirla, cuando los lados del cuadrado y el radio del círculo miden lo mismo.**

Para realizar la actividad de la página anterior, Hilda trabajó en un programa de geometría dinámica en su computadora. Trazó diferentes círculos y cuadrados, cuyos lados medían lo mismo que el radio correspondiente, y con el apoyo del programa obtuvo la medida de los lados del cuadrado y el área del círculo.



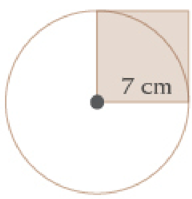




1. Observen, en parejas, las medidas en las figuras y completen la siguiente tabla.

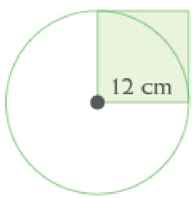
| Figura | Área del cuadrado ($u^2$) | Área del círculo ($u^2$) | $\frac{\text{Área del círculo}}{\text{Área del cuadrado}}$ |
|---|---|---|---|
| Verde | | 201.06 | |
| Morada | | 289.529 | |

- ¿Cuántas veces cabe el área de cada cuadrado en el círculo correspondiente?
- ¿Cómo se puede obtener el área de un círculo a partir de un cuadrado cuyos lados miden lo mismo que el radio del círculo?

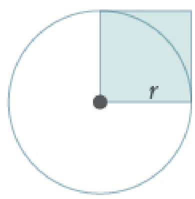
2. Calculen el área de los siguientes cuadrados y, a partir de la tabla anterior, calculen el área de los círculos correspondientes.




Cuadrado: A = _______
Círculo: A = _______




Cuadrado: A = _______
Círculo: A = _______

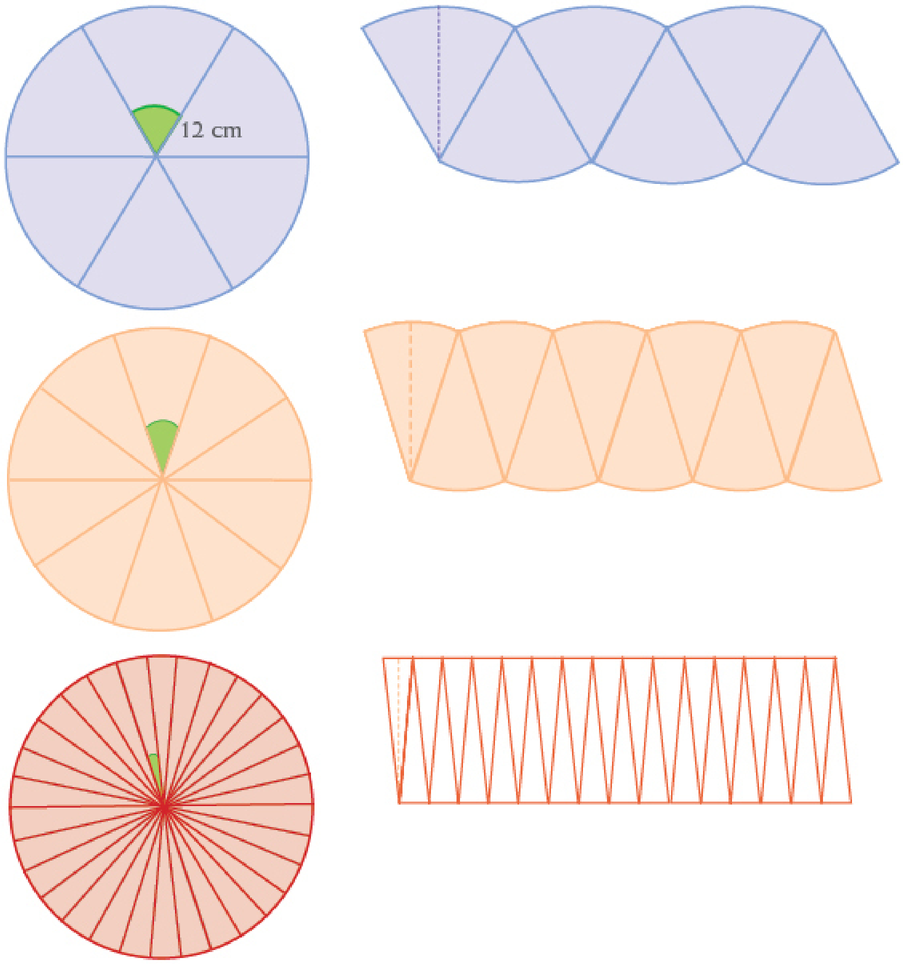



Cuadrado: A = _______
Círculo: A = _______

Comparen sus resultados con los de otras parejas. ¿A qué valor se parece "el número de veces que cabe" el área de un cuadrado de lado "$r$" en el área de un círculo con el mismo lado? Comenten si a partir de lo anterior es posible establecer una fórmula para calcular el área de un círculo. Discutan en grupo para llegar a acuerdos.

**II. Determino y justifico la fórmula para calcular el área de un círculo.**

La maestra le pidió a sus alumnos dibujar un círculo de 12 cm de radio y dividirlo en sectores circulares, mediante ángulos de la misma medida. Observen la forma en que diferentes estudiantes dividieron la figura para calcular su área. Después, respondan.




- ¿Cuál es la longitud de cada circunferencia?
- De acuerdo con lo visto en las actividades anteriores, ¿cuál es el área de cada círculo?
- Cuantos más ángulos iguales dividan al círculo, ¿a qué tipo de cuadrilátero tiende a parecerse la figura resultante?

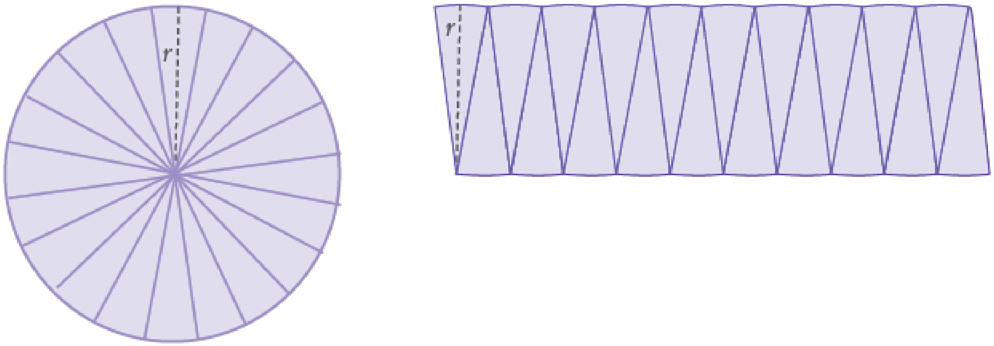
Escriban la fórmula para calcular el área del cuadrilátero.

- ¿Qué parte de la longitud de la circunferencia representa la base del cuadrilátero? ¿Cuánto mide?
- ¿Qué elemento del círculo representa la altura del cuadrilátero?
- De acuerdo con lo anterior, ¿qué procedimiento permite obtener el área del círculo?
- ¿Cuál es el área de cada círculo?

### Tomo Nota

Recuerda que el número pi ($\pi$) representa la relación entre una circunferencia y su diámetro, y es igual a ______________ ÷ ______________ = 3.1416….

1. Analicen las siguientes figuras y respondan.



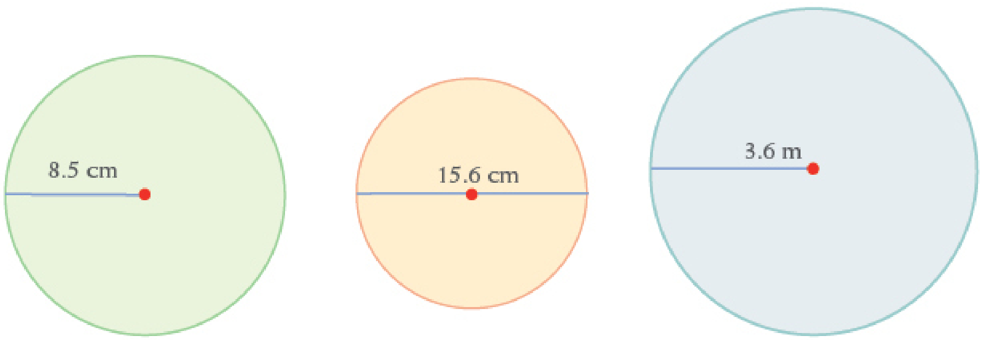

- ¿Cuál es la medida del perímetro del círculo en función de $r$ y de pi? __________

Escriban la expresión simplificada que representa la medida de la base de la figura que se formó con los ángulos del círculo: ________________

- ¿Qué expresión representa el área de la figura que se forma, es decir, el área del círculo?
- Si $r$ vale 20, ¿cuál es el área del círculo?
- Si $r = 15$, ¿cuál es el área del círculo?
- De acuerdo con lo visto, ¿qué procedimiento permite calcular el área de cualquier círculo?

Revisen sus respuestas en grupo y juntos establezcan una fórmula o expresión general para obtener el área de cualquier círculo.

2. Calculen el área de los siguientes círculos a partir de la fórmula establecida:




A = __________________ A = __________________ A = __________________

**III. Resuelvo problemas relacionados con el cálculo del área del círculo.**

1. Calculen el área de cada círculo a partir de los valores que se muestran en cada caso.

Díametro=32.4 cm

Perímetro=78.54 dm

Perímetro=24 π m

A = ________________ A = ________________ A = ________________

- ¿Cómo se obtiene el área de un círculo a partir de la medida de su diámetro?
- ¿Cómo se obtiene el área de un círculo a partir de su perímetro?
- Si se conoce el área, ¿cómo se puede determinar la medida del radio?

2. Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

| Círculo | Radio (cm) | Diámetro (cm) | Perímetro (cm) | Área ($cm^2$) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6.2 | | | |
| 2 | | 18 | | |
| 3 | | | 87.9648 | |
| 4 | | | | 63.6174 |
| 5 | 12.4 | | | |

### Tomo Nota

La fórmula que permite obtener el área de un círculo es igual a ____________ al cuadrado por __________, y algebraicamente se representa como:

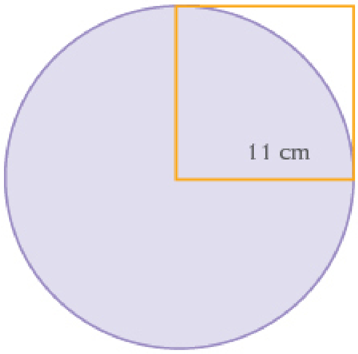
A = _______ × _______.

3. Discutan cada pregunta antes de responder.

- Si duplicas la medida del diámetro de un círculo, ¿qué sucede con su perímetro y su área?
- ¿Qué sucede con el área si el radio se reduce a una tercera parte?
- ¿Existe proporcionalidad directa entre la medida del radio de un círculo y el área?

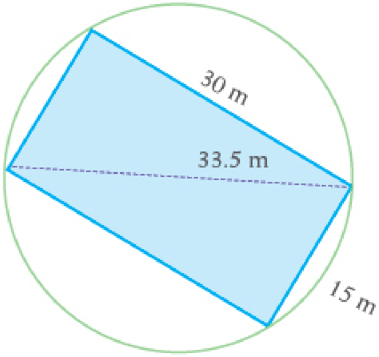
4. Analicen en parejas las siguientes figuras y calculen el área de cada círculo. Después, respondan.

Figura 1




A=_______________

Figura 2




A=_______________

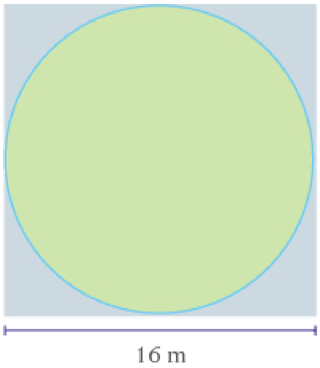
- ¿Cuál es el área del cuadrado que no forma parte del círculo en la figura 1? Expliquen su procedimiento.
- ¿Cuál es el área del círculo de la figura 2 que no ocupa el área del rectángulo? Escriban las operaciones que realizaron:

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Discutan los procedimientos y aclaren las diferencias que existen. Comenten sobre la relación entre el área y el perímetro de un círculo y cómo se puede obtener uno a partir de la medida del otro. Registren sus acuerdos.

## Practico

1. Martín va a pintar el logotipo de una empresa sobre una pared. El logotipo tiene forma circular y Martín lo va a trazar sobre una superficie que mide 5.8 m de diámetro.
   - ¿Cuál es el perímetro del logotipo?
   - ¿Cuál es el área que ocupará el diseño de Martín?

2. Se quiere colocar pasto en una superficie circular inscrita en un terreno cuadrado cuyos lados miden 16 m, como muestra la imagen.
   - ¿Qué área del terreno quedará sin pasto?




**Utilizo las TIC**

Ingresa a la liga: cmed.mx/m268 y resuelve los problemas relacionados con el perímetro de un círculo. Comprueba tus resultados. Si algunos son incorrectos, intenta resolver con una pista a fin de detectar el error; también puedes seleccionar la información contenida en los videos y practicar resolviendo todos los problemas que te ofrece este recurso.

## Recapitulo

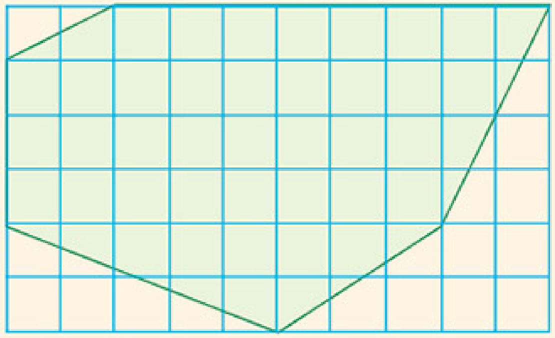
1. La triangulación es una forma de calcular el área de polígonos irregulares: consiste en dividir el área en triángulos y calcular y sumar las áreas de tales figuras.
2. Los polígonos regulares son figuras planas con todos sus ángulos y lados de la misma medida, como el triángulo equilátero y el cuadrado de 3 y 4 lados, respectivamente.
3. La apotema es el segmento que une el centro de un polígono regular con el punto medio de sus lados.
4. El perímetro de un polígono regular (de *n* lados) es igual a la suma de la medida de sus lados (que miden *l*). Entonces, la fórmula del perímetro es $P = nl$.
5. Para calcular el área de un polígono regular, se multiplica el perímetro por la apotema y el resultado se divide entre 2: $A = \frac{Pa}{2}$.
6. Un círculo es una superficie delimitada por una circunferencia. El radio es el segmento que une cualquier punto de una circunferencia con su centro.
7. Para calcular el área de un círculo, se multiplica *pi* por la medida del radio al cuadrado: $A = \pi r^2$.

# Evalúo mi aprendizaje

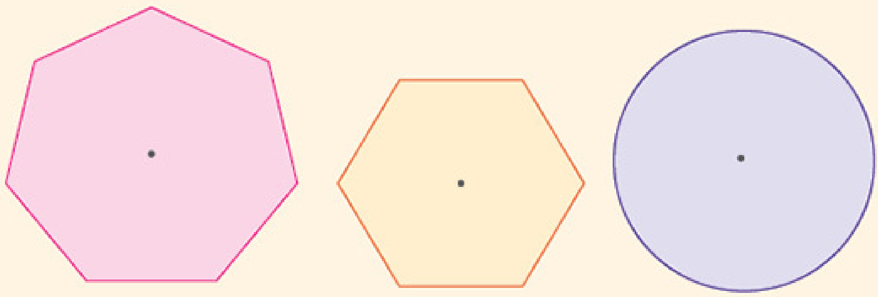
Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Divide la figura como prefieras, toma las medidas necesarias y calcula su área. Considera que un cuadrado mide 1 m² de área.

A = ________



**2.** Mide con tu regla las dimensiones de las figuras y calcula su área.



A = ___________ A = ___________ A = ___________

**3.** Resuelve.

a. ¿Cuál es el área de un nonágono regular cuyos lados miden 9 cm y su apotema, 12.36 cm?

b. ¿Cuál es la medida de los lados de un octágono regular cuya área mide 1 086 m² y su apotema, 18.1 m?

c. ¿Cuál es el área de un círculo cuyo radio mide 9.4 m?

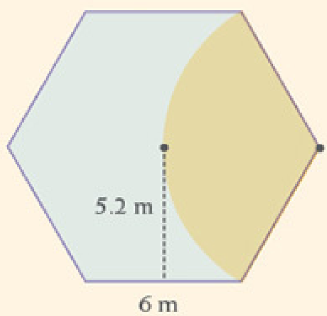
d. Si el diámetro de una circunferencia mide 7 m y se duplica, ¿cuál será el área del círculo resultante?

e. Si el área de un círculo mide 1 256.64 m², ¿cuál es la longitud de la circunferencia que lo contiene?

**4.** Para regar un jardín se coloca, en una de las esquinas, un aspersor que al girar alcanza a regar la superficie que muestra la imagen.

a. ¿Qué superficie del jardín se alcanza a regar?

b. ¿Qué superficie del jardín queda sin regar?



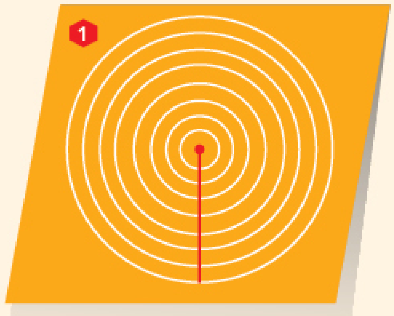
# Logro ir **más allá**

A lo largo de la lección experimentaste diferentes métodos de obtener o justificar la fórmula para calcular el área de un círculo.

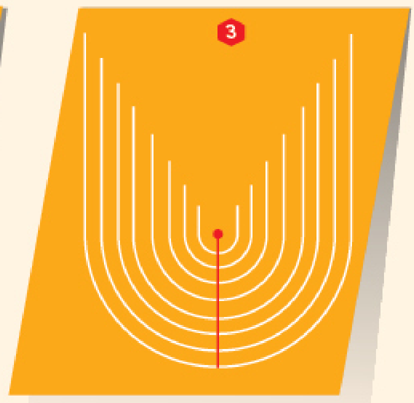
- ¿Cuál de ellos te gustó o te pareció más interesante? ¿Conoces algún otro? Si es el caso, descríbelo.

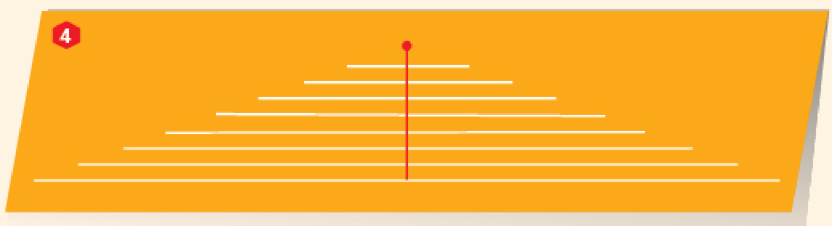
Existen otros métodos que permiten justificar la fórmula del área de un círculo; uno de ellos es la siguiente secuencia de imágenes: mediante el razonamiento deductivo puedes obtener la fórmula.

1. Analiza las imágenes y responde.








- ¿Cómo demuestras, con la secuencia de imágenes, la fórmula para calcular el área de un círculo? Descríbela con tus palabras y después de manera algebraica.
- ¿Te sorprendió esta demostración gráfica? ¿Por qué? En libros o en internet, indaga sobre diferentes demostraciones gráficas de la fórmula para calcular el área del círculo y comparte con el grupo la que más te haya gustado.

L27

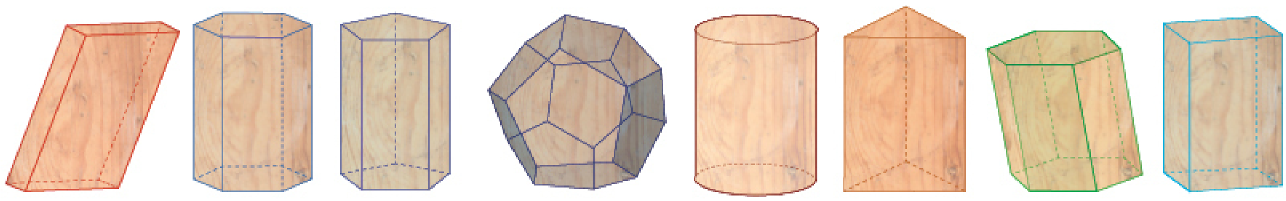
# Volumen de prismas rectos y cilindros

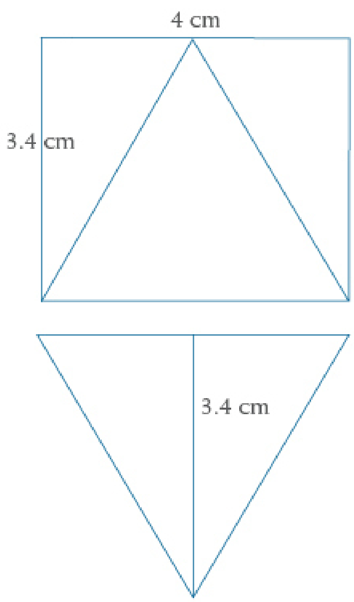
Los **cuerpos geométricos**, llamados también sólidos, que tienen tres dimensiones, es decir, tienen volumen. Los prismas son cuerpos geométricos que tienen dos bases y tantas caras laterales como lados tiene la base. En los prismas rectos, las bases son polígonos congruentes y las caras laterales son perpendiculares a las bases. Los prismas reciben su nombre de acuerdo con la forma de su base.

Exploro

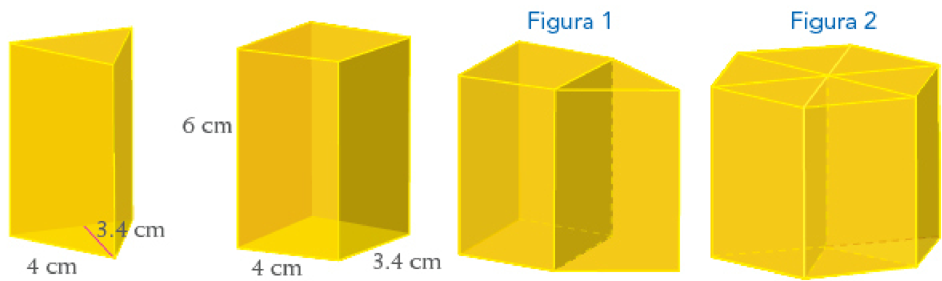
## Identifico prismas rectos y calculo su volumen.

1. Analiza los siguientes cuerpos geométricos, que forman parte de un juego de figuras que Toño recibió de regalo. Encierra con una línea aquellos que representan un prisma recto y escribe su nombre.






2. Observa la medida de algunos de los prismas de Toño y las figuras que formó con ellos, y resuelve. Considera que la base del prisma es un triángulo equilátero.




- ¿Cuál es volumen del prisma rectangular?
- ¿Qué procedimiento seguiste para obtener el volumen del prisma?
- ¿Qué relación hay entre el volumen de los prismas triangular y rectangular?

Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el volumen de la figura 1?
- ¿Cuál es el volumen de la figura 2?
- ¿Qué forma tiene el prisma de la figura 2?

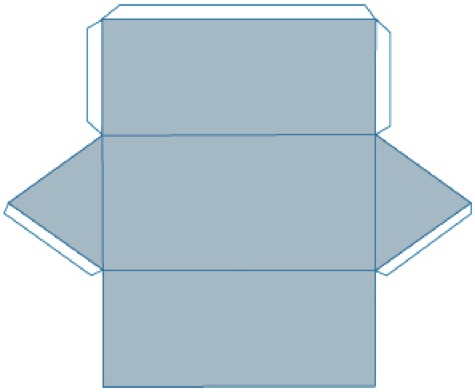
Valida tus respuestas con las de una pareja. Comenten sobre el procedimiento para calcular el volumen de la figura 2. ¿Es posible calcularlo mediante una fórmula? Discutan en grupo y registren sus acuerdos.

Descubro y construyo

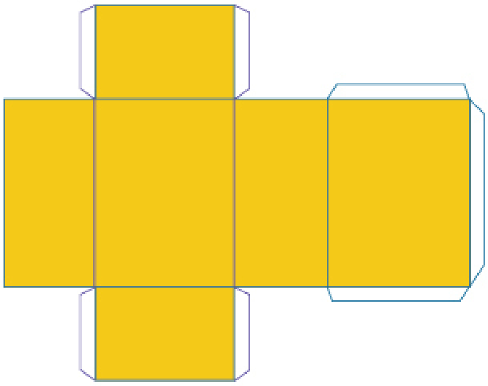
## I. Calculo el volumen de prismas rectos a partir de su desarrollo plano.

1. Analicen en parejas los siguientes desarrollos planos y respondan.

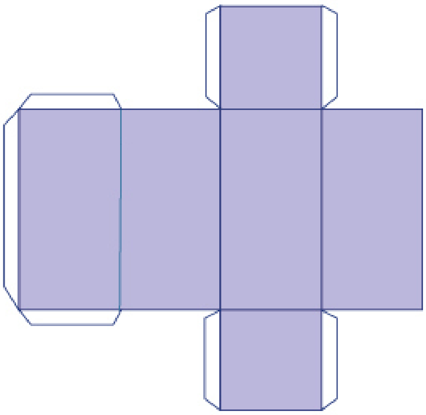
Prisma 1



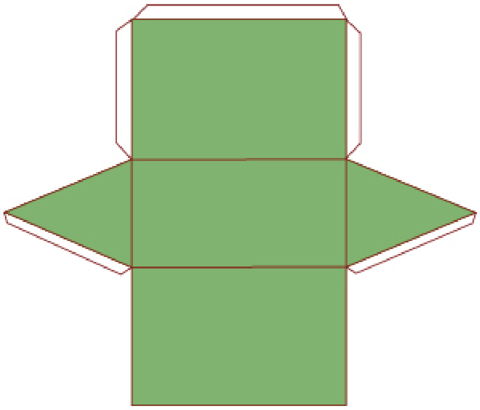
Prisma 2



Prisma 3



Prisma 4



- ¿Qué tipo de prisma corresponde a cada desarrollo plano?
- ¿Qué fórmula permite obtener el volumen de cada prisma?
- ¿Qué medidas deben tomarse para obtener el volumen de los prismas a partir del desarrollo plano?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Juntos tomen las medidas necesarias y determinen el volumen de los prismas que se forman con los desarrollos planos. Anoten la medida junto a cada figura.

2. Ahora, copien los desarrollos planos de la página anterior y armen los cuerpos geométricos. Continúen trabajando en parejas y formen todos los prismas. Tomen las medidas y completen la siguiente tabla.

| Prisma | Largo de la base (cm) | Alto de la base (cm) | Área de la base ($cm^2$) | Altura (cm) | Volumen ($cm^3$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |

- ¿Coincidieron las medidas con las que obtuvieron antes? Si no es así, revisen sus resultados para detectar el error y corregir.

3. Junten sus prismas triangulares con los de otras parejas de manera que puedan formar un nuevo prisma cuya base sea un prisma regular, como el de la figura de la actividad *Exploro*. Juntos respondan.
   - ¿Qué nuevo prisma formaron con el prisma #1?
   - ¿Y con el prisma #4?
   - ¿Cuál es el volumen de cada prisma formado?
   - ¿Cómo los obtuvieron?
   - ¿Cómo se calcula el área de un polígono regular?

4. Completen la siguiente tabla.

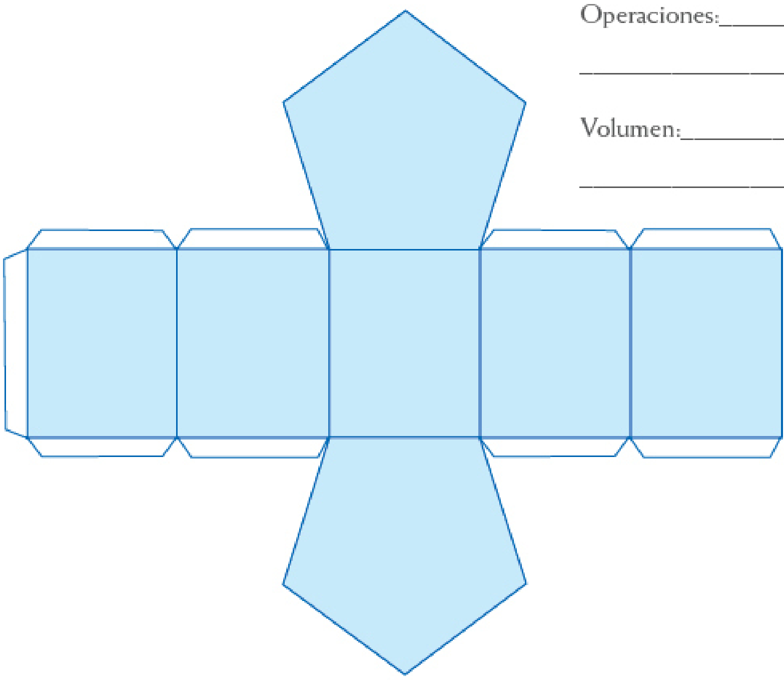
| Prisma formado | Lados de la base (cm) | Apotema de la base (cm) | Área de la base ($cm^2$) | Altura (cm) | Área de la base por altura ($cm^3$) |
|---|---|---|---|---|---|
| Nuevo 1 | | | | | |
| Nuevo 4 | | | | | |

- ¿Cómo es el resultado de la última columna con el volumen que calcularon antes?
- ¿Qué relación hay entre la altura del triángulo original y la apotema del polígono que se forma?
- ¿Qué procedimiento permite obtener el volumen de cualquier prisma cuya base sea un polígono regular?
- ¿Dicho procedimiento es aplicable a cualquier polígono recto? ¿Por qué?

Validen sus procedimientos con el maestro y, con su apoyo, determinen una fórmula para calcular el volumen de cualquier prisma recto.

**II. Calculo el volumen de prismas rectos aplicando la fórmula correspondiente.**

1. Calca los siguientes desarrollos planos y también el de la siguiente página; elabora los prismas y calcula su volumen. Considera que las bases son polígonos regulares.

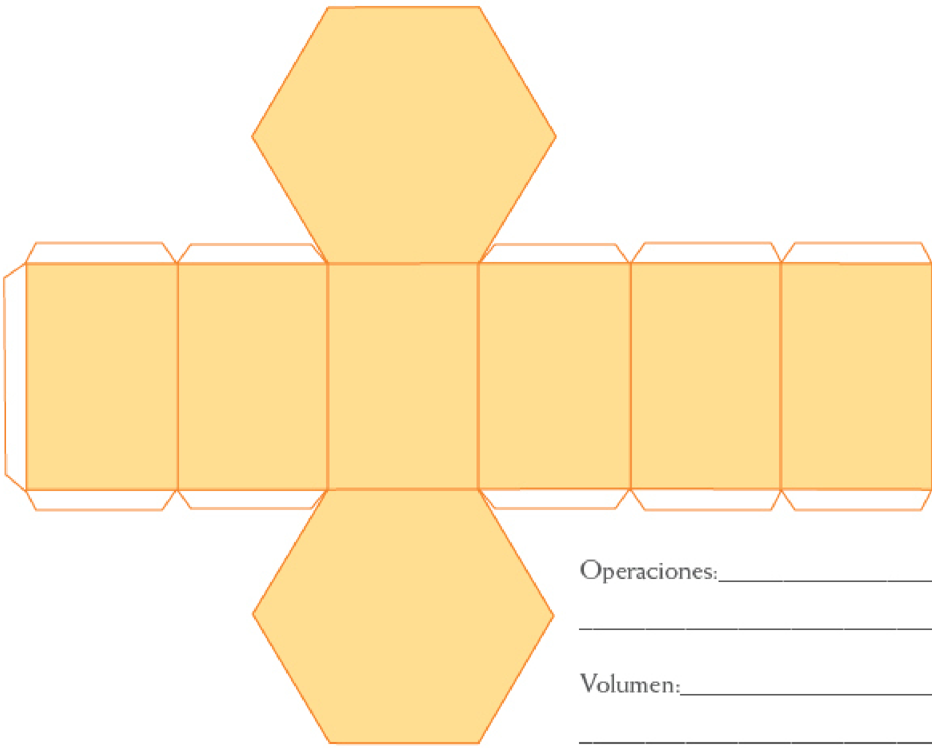


Operaciones:______________________

__________________________________

Volumen:__________________________

__________________________________



Operaciones:______________________

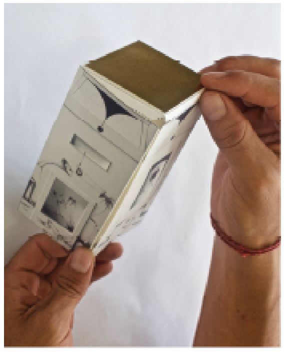
__________________________________

Volumen:__________________________

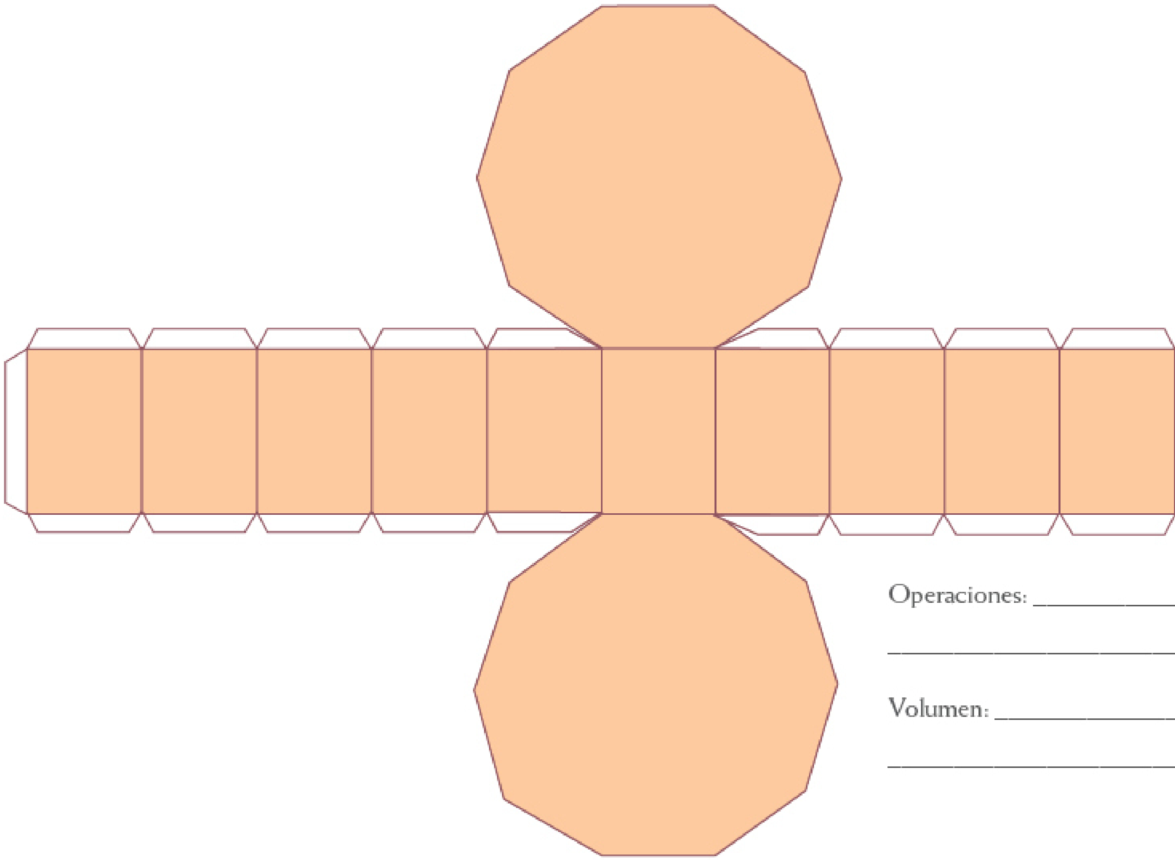
__________________________________

**Utilizo las TIC**

Elije el prisma que más te guste y decóralo con tus dibujos, con obras de arte o con las fotografías que te sean más significativas. Muéstraselos a tus compañeros y comunícales por qué decidiste decorarlo así.



Entra a: cmed.mx/m277 y aprende más de los prismas manipulando las herramientas de este recurso.



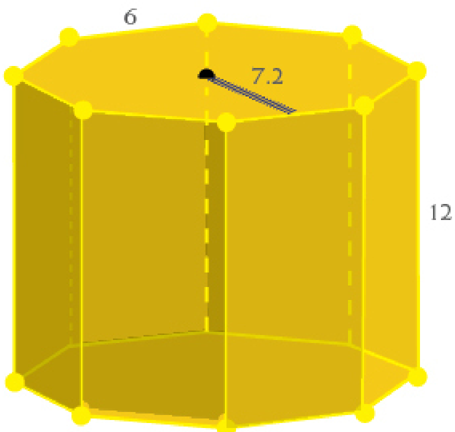
Operaciones: ______________________

___________________________________

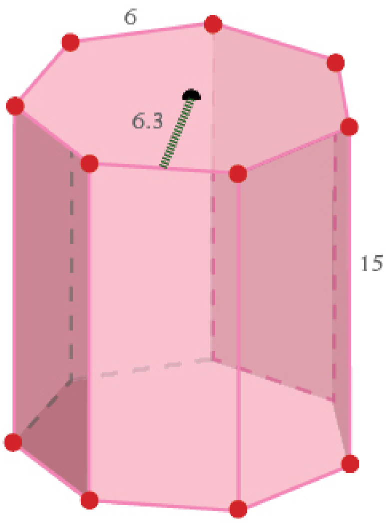
Volumen: _________________________

___________________________________

2. Calcula el volumen de los siguientes prismas, cuyas bases son polígonos regulares.




V= _______________




V= _______________

## Tomo Nota

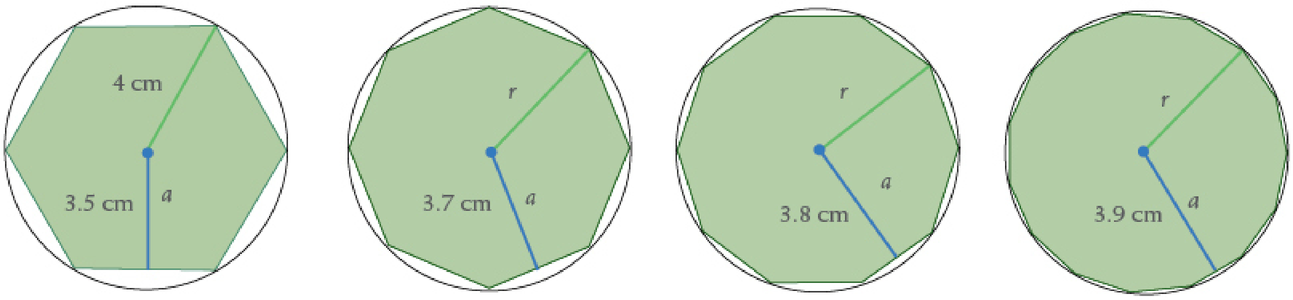
El volumen de cualquier prisma recto se calcula multiplicando el _______________ ($A_b$) por ___________________ ($h$).
Esto es igual a la fórmula:
V = ______

Reúnete con un integrante del grupo y comparen sus resultados.

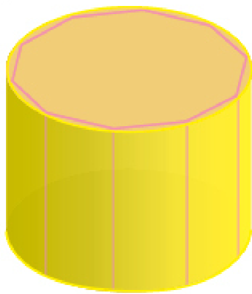
**III. Establezco la fórmula para calcular el volumen del cilindro.**

El cilindro es un cuerpo geométrico con las bases paralelas en forma de círculo y una cara curva.

1. Observen, en parejas, los siguientes polígonos inscritos sobre circunferencias que tienen un radio de 4 cm; calculen su área.




- Cuantos más lados tiene un polígono regular, ¿a qué figura tiende a parecerse?
- Cuantos más lados tienen los polígonos, ¿a qué elemento del círculo se parece su apotema ($a$)?
- Cuantos más lados tiene un polígono, ¿al área de qué figura tiende a parecerse a su área?



2. Ahora, supongan que las figuras anteriores representan la base de prismas que están dentro de cilindros que tienen la misma altura, como muestra la imagen de la derecha:
   - ¿El volumen de qué prisma usarían como aproximación al volumen del cilindro? ¿Por qué?

   Calculen el volumen de los prismas a partir de las medidas que muestra la tabla.

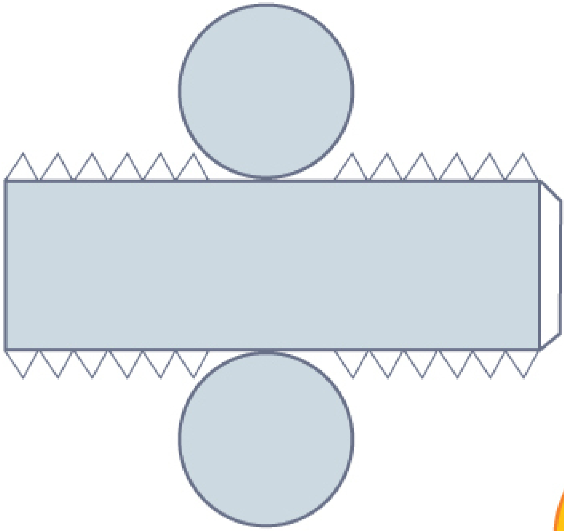
| Número de lados del prisma | Apotema (cm) | Lados (cm) | Altura (cm) | Volumen ($cm^3$) |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 3.5 | 4 | 6.5 | |
| 8 | 3.7 | 3 | 6.5 | |
| 10 | 3.8 | 2.5 | 6.5 | |
| 15 | 3.9 | 1.7 | 6.5 | |

   - ¿Cómo determinarían el volumen de un cilindro?
   - ¿Cuál es el volumen del cilindro?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Discutan los procedimientos y, con la ayuda del maestro, determinen la fórmula para calcular el volumen de cilindros.

**IV. Calculo el volumen de cilindros.**

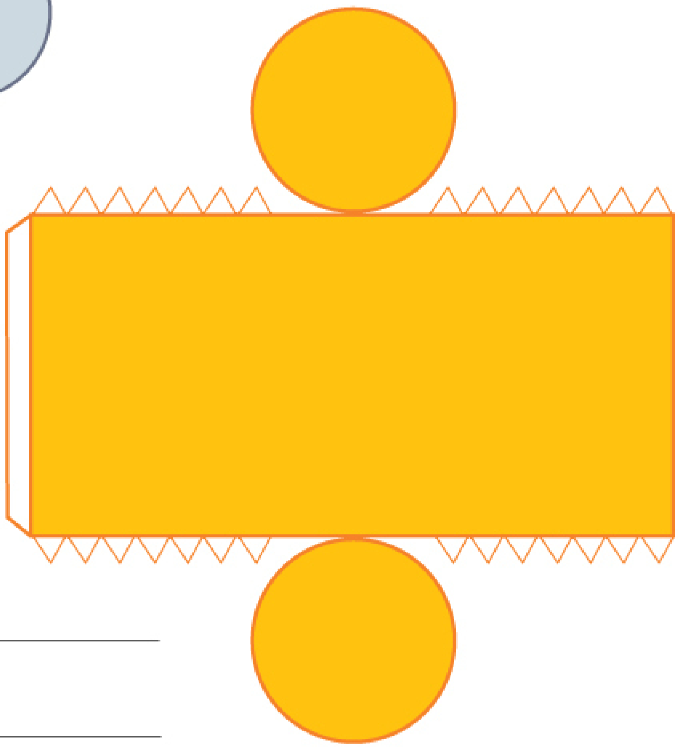
1. Copia los siguientes desarrollos planos, toma las medidas y calcula su volumen.



Fórmula: ____________________

Operaciones: ________________

Volumen: ___________________



Fórmula: ____________________

Operaciones: ________________

Volumen: ___________________

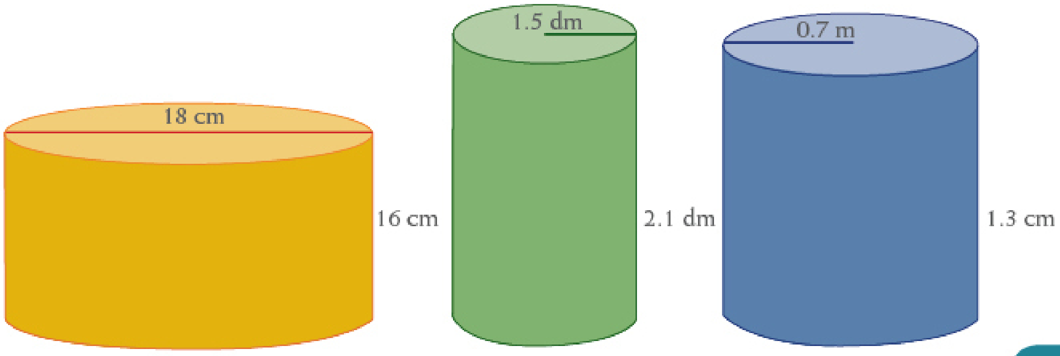
## Tomo Nota

El volumen de un cilindro se calcula de la misma manera que la de un prisma recto, se multiplica el área de la ____________ por la ______________.

**Utilizo las TIC**

Ingresa a la liga: cmed.mx/m269 y resuelve los ejercicios que ahí se ofrecen para practicar el cálculo del volumen de cilindros. Comprueba tus respuestas y, si hay error, pide una pista para revisar tu procedimiento.

2. Calcula el volumen de los siguientes cilindros.




a. V = ______________ b. V = ______________ c. V = ______________

Compara tus resultados con los de otros compañeros. En caso de que existan diferencias, revisen sus procedimientos en busca de error. Si tienen dudas, busquen el apoyo del maestro para resolverlas.

## Practico

1. Calcula el volumen de un prisma pentagonal cuya base mide 7 cm por lado, su apotema mide 4.8 cm y tiene una altura de 8 cm. V = ____________

2. Calcula el volumen de los siguientes alhajeros con forma de prisma regular, a partir de las medidas que se muestran.

Lados de la base: 11 cm

Apotema: 13.3 cm

Altura: 9 cm

Volumen: ____________

Lados de la base: 14 cm

Apotema: 12.1 cm

Altura: 12 cm

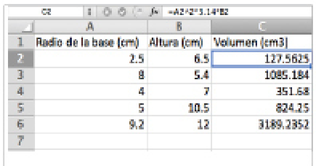
Volumen: ____________

3. Si el radio de la base de un tambo con forma de cilindro mide 0.5 m y tiene una altura de 1.8 m, ¿cuál es su volumen? ____________

4. Calcula el volumen de los siguentes cilindros de madera.
   - Cilindro chico: radio, 4.5 cm; altura, 12 cm.
     V = ____________
   - Cilindro grande: radio, 6 cm; altura, 25 cm.
     V = ____________

### Utilizo las TIC

En una hoja de cálculo electrónica calcula el volumen de diferentes cilindros. En la columna A escribe la medida del radio de la base de los cilindros y en la columna B anota su altura (ambas medidas en cm), en la columna C escribe la fórmula: =A 2^2*3.14*B2 y da "enter", selecciona la casilla y arrástrala hacia abajo para copiar la fórmula y poder calcular el resultado para cada caso.



C2 =A2^2*3.14*B2

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Radio de la base (cm) | Altura (cm) | Volumen (cm3) |
| 2 | 2.5 | 6.5 | 127.5625 |
| 3 | 8 | 5.4 | 1085.184 |
| 4 | 4 | 7 | 351.68 |
| 5 | 5 | 10.5 | 824.25 |
| 6 | 9.2 | 12 | 3189.2352 |
| 7 | | | |

L28

# Problemas relacionados con el volumen y la capacidad

El petróleo es la fuente de energía más importante en la actualidad. En México, cerca de 88% de la energía primaria que se consume proviene de él. El petróleo crudo es un líquido oleoso de color entre amarillo oscuro y negro que suele encontrarse en yacimientos subterráneos naturales. Este hidrocarburo procede de la descomposición, por microorganismos, de materia orgánica. El petróleo crudo se extrae y se emplea para fabricar combustible y otros productos derivados.

Exploro

**GLOSARIO**

**Barril de petróleo.** Unidad de volumen equivalente a 42 galones.

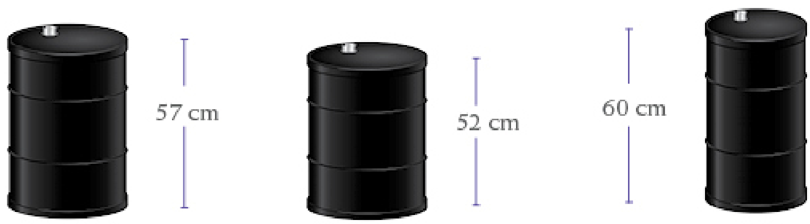
## Resuelvo problemas relacionados con el volumen y la capacidad de un cilindro.

En 2017, México produjo, en promedio, 1 948 000 **barriles de petróleo** diarios.

1. Responde a partir de la información anterior.
   - ¿Cuál fue la producción de petróleo anual de México en 2017, representada en notación científica? Redondea a dos cifras decimales.
   - Si la producción en 2017 fue 9.5% menor que en 2016, ¿cuál fue la producción diaria promedio en 2016?
   - Si un galón es igual a 3.78 litros, ¿a cuántos litros equivale un barril de petróleo?

   En lecciones anteriores estudiaste equivalencias entre el SI y el Sistema Inglés.
   - Un envase que contiene un barril de petróleo, ¿a cuántos decímetros cúbicos equivale? ¿Y a cuántos metros cúbicos?

2. Calcula el volumen de los siguientes barriles y determina cuál o cuáles pueden contener, aproximadamente, un barril de petróleo. Considera que pi = 3.1416.




Radio = 30 cm
V = __________

Radio = 35 cm
V = __________

Radio = 27 cm
V = __________

   - Si el radio de la base de un barril de petróleo mide 3.2 dm, ¿cuál es su altura?

Compara, en pareja, tus respuestas. Comenten sobre la relación entre unidades de volumen y unidades de volumen y capacidad, y cómo realizar conversiones entre ellas.

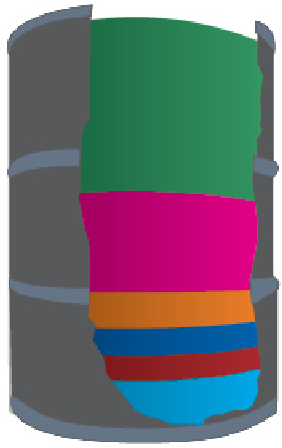
**Leo +**

Ingresa a esta liga para conocer de qué se compone el petróleo y cómo se forma, extrae y refina.
cmed.mx/m270

Comparte con tus compañeros tu opinión sobre el uso del petróleo como fuente de energía y su impacto en el ambiente. Si quieres saber el significado de alguna palabra, búscala en el diccionario o enciclopedia; encontrarás más información interesante relacionada con el tema.

Descubro y construyo

**I. Calculo medidas de un cilindro a partir de su volumen y de alguna otra medida, y resuelvo problemas.**




Retomando el tema del petróleo, ¿qué se obtiene de un barril de petróleo crudo? Según el Departamento de Energía de Estados Unidos, los productos derivados del petróleo se obtienen en los siguientes porcentajes:

45% - Gasolina para motores
23% - Combustibles destilados
8% - Combustible para aviones tipo queroseno
5% - Coque de petróleo
4% - Gas de destilación
15% - Otros

1. Completen, en parejas, la siguiente tabla para saber qué cantidad de cada barril de petróleo se destina a los diferentes productos. Consideren 159 litros por barril.

| Porcentaje | 45% | 23% | 8% | 5% | 4% | 15% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Litros de un barril de petróleo (159 l) | | | | | | |
| Volumen (cm³) | | | | | | |

- Supongan que la altura del barril que se muestra mide 65 cm; ¿cuál es la medida de su radio en centímetros? Redondeen al número entero más cercano.

Expliquen la respuesta. ______________________________

- Si el barril estuviera lleno de la forma en que se muestra, ¿cuál sería la altura del espacio que corresponde a "Gasolina para motores"?
- ¿Cómo obtuvieron la respuesta?

2. Calculen la altura que le correspondería a cada producto considerando el volumen anterior y completen la tabla. Redondeen la respuesta a una o dos cifras decimales.

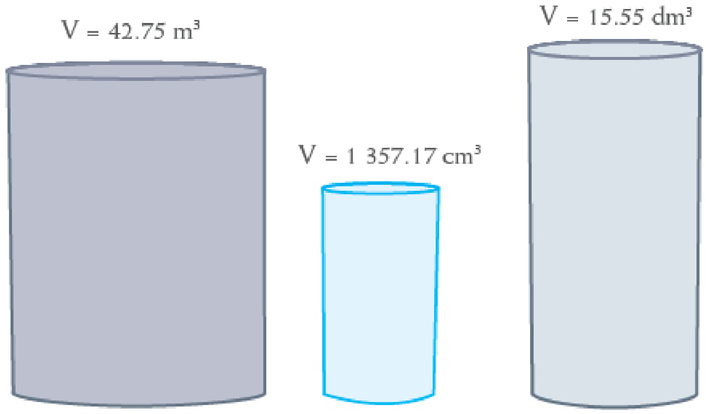
| | Medidas del cilindro | | |
|---|---|---|---|
| Tipo de combustible | Área de la base (cm²) | Volumen (cm³) | Altura (cm) |
| Destilado | | | |
| Para aviones | | | |
| Coque de petróleo | | | |
| Gas | | | |
| Otros | | | |

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. ¿Cómo calcularían el volumen de un cilindro si se conoce alguna de sus dimensiones, como la base o la altura? En grupo, validen su respuesta.

### Tomo Nota

Recuerda que las unidades de volumen y capacidad se relacionan de manera que 1 litro equivale a un cubo que mide 1 _____ por lado, es decir, 1 L = ________. Si 1 litro es igual a _____mL, entonces es igual a _____ cm³ y a 0.001 _____.

3. Calculen las medidas que faltan en los siguientes objetos con forma de cilindro, a partir de las medidas dadas.



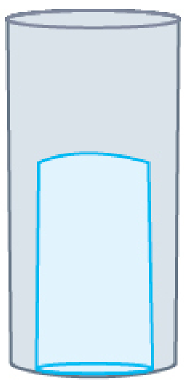

| | Tinaco | Vaso | Florero |
|---|---|---|---|
| Área de la base | | 113.09 cm$^2$ | |
| Radio de la base | | | 1.5 dm |
| Altura | 4.2 m | | |
| Capacidad (L) | | | |

**Utilizo las TIC**

Ingresa a la liga: cmed.mx/m271 y da clic en las opciones: "Volumen", "Cilindro" y "Resolver x". Resuelve los ejercicios para practicar lo que aprendiste en las actividades de la lección. Revisa los aciertos y "Reinicia" cuantas veces quieras para seguir practicando.

4. Expliquen cómo obtuvieron las medidas faltantes en cada caso:

- Tinaco: ______________________________
- Vaso: ______________________________
- Florero: ______________________________

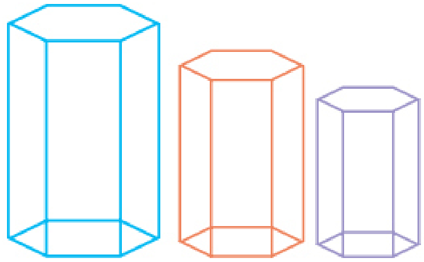


5. Consideren las medidas de los objetos anteriores y respondan.

- Si el tinaco contiene 8 400 L de agua, ¿qué altura del cilindro alcanza el agua?
- Expliquen su procedimiento.
- Si el vaso de agua se vierte con una botella de un litro aproximadamente, ¿qué altura alcanza el agua?
- Imaginen que el vaso se coloca boca abajo dentro del florero, como muestra la ilustración de la izquierda. Si el florero se llena con agua y después se saca el vaso, ¿qué altura alcanzará el agua en el florero?
- ¿Cómo obtuvieron el resultado?

Validen sus respuestas con las de otras parejas. Puede que haya diferencias decimales mínimas en los resultados; si la diferencia es considerable, revisen sus resultados desde las tablas del inicio de la página con el fin de detectar los posibles errores. Si lo consideran necesario, busquen el apoyo del maestro.

## II. Calculo las medidas de prismas rectos a partir de su volumen y de algunas otras medidas implícitas en la fórmula y resuelvo problemas.



En una fábrica están planeando el nuevo diseño para el envase de los jugos de $\frac{1}{2}$ litro, 1 L y 2 L. Los directivos solicitaron envases con forma de prisma recto, como los que se muestran a la derecha. Los diseñadores establecieron cierta medida para la base de los jugos, en cm², y ahora sólo falta decidir la altura que cada uno requiere de acuerdo con su capacidad.

1. Anoten el volumen que corresponde a la capacidad de cada envase en cm³.

   $\frac{1}{2}$ L = __________ 1 L = __________ 2 L = __________

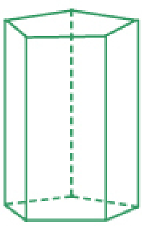
   - ¿Cómo determinarían la altura de cada envase sabiendo el área de la base y su capacidad o volumen?
   - Si el área de la base del envase de medio litro mide 64.95 cm², ¿cuál tiene que ser su altura, en centímetros? Redondeen el resultado al entero más cercano.

2. Calculen las medidas que faltan en el envase de 1 L y 2 L. Redondeen los resultados a una o dos cifras decimales.

| Capacidad (L) | Lados de la base (cm) | Apotema (cm) | Área de la base (cm²) | Altura (cm) | Volumen (cm³) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | | | 10.7 | 1 000 |
| 2 | | 6.9 | | 12 | 2 000 |

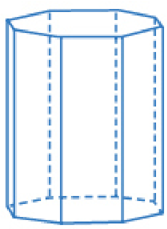
   - ¿Qué hicieron para calcular el área de la base y la apotema en el envase de 1 L?
   - ¿Qué hicieron para calcular el área de la base y la medida de los lados en el envase de 2 L?

3. Estimen, sin hacer operaciones escritas, la altura de los siguientes prismas rectos a partir de las medidas que se muestran.



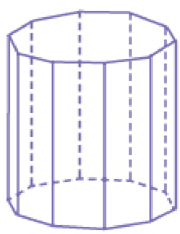
$h$ = ______

$V = 387\ cm^3$
$A_b = 43\ cm^2$



$h$ = ______

$V = 465\ cm^3$
$A_b = 77.5\ cm^2$



$h$ = ______

$V = 964.64\ cm^3$
$A_b = 120.58\ cm^2$

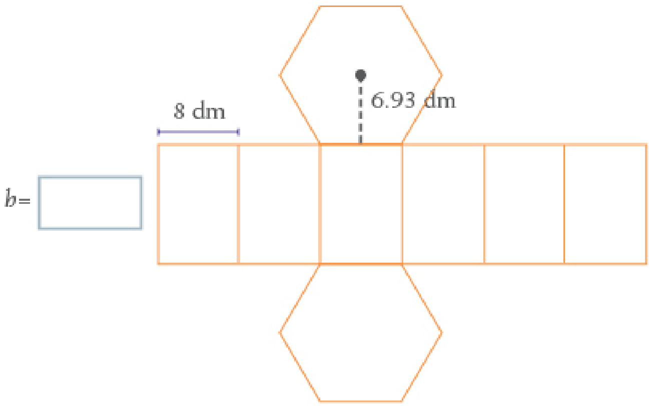
Validen sus estimaciones con las de otros compañeros. Después, verifiquen sus resultados realizando las operaciones con la calculadora.

### Tomo Nota

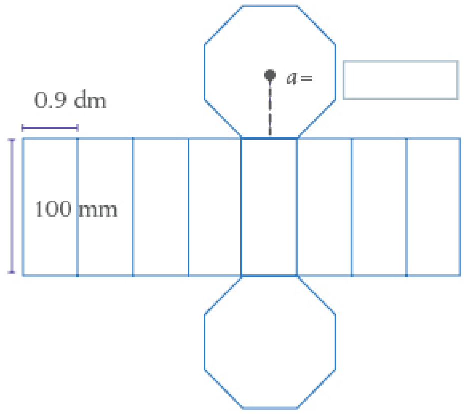
Es necesario que recuerdes la fórmula para calcular el área de polígonos regulares, que es igual a ____________ por ____________ entre dos; A =______ .

4. Calculen las medidas que faltan en cada desarrollo plano, considerando el volumen que tendrían al construir los prismas. Después, respondan.

Volumen: 1 995.84 dm$^3$



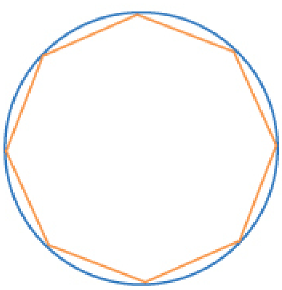

Volumen: 3 909.6 cm$^3$




- El prisma hexagonal funciona como un contenedor de arena. Si el material que en este momento se encuentra dentro de él ocupa 0.95 m$^3$, ¿qué altura alcanza el material en centímetros? Describan su procedimiento.
- Si en el prisma octagonal se vierte $1\frac{3}{4}$ de litros de agua, ¿qué distancia habrá del agua al límite superior del prisma? Escriban las operaciones que les permitieron resolver el problema.

Reúnanse con otros equipos y comparen sus resultados y estrategias de solución. Revisen los procedimientos y la relación entre los elementos de las fórmulas correspondientes y las equivalencias entre las unidades de volumen y capacidad.

**III. Resuelvo problemas relacionados con el volumen de primas rectos y del cilindro.**

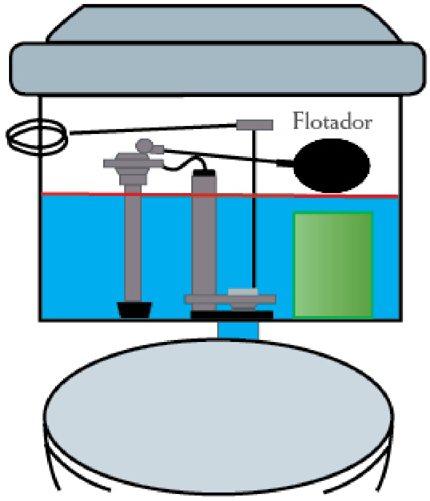


1. Analicen, en parejas, la figura de la izquierda que representa la base de un prisma octagonal inscrito en un cilindro (visto desde arriba); ambos tiene la misma altura.

- Los lados del prisma miden 9 cm y su apotema, 10.8 cm. Si su volumen es de 5.832 dm$^3$, ¿cuál es la altura de ambos cuerpos?
- Si el volumen del cilindro es de 6 116 cm$^3$, ¿cuál es la medida de su radio?
- Supongan que el espacio que no ocupa el prisma se llena con arroz. Si después de llenar el cilindro se saca el prisma, ¿a qué altura queda el arroz dentro del cilindro?

2. Observen la imagen que muestra la caja interior de un inodoro que tiene forma de prisma rectangular y los aparatos que la conforman.

El flotador no permite que el agua rebase cierta altura y, con el fin de ahorrar agua en las descargas, se colocó, dentro de la caja y al fondo, un envase de forma cilíndrica. Así, cada vez que se "jale" la palanca del baño, será menos el agua que se utilice.




El agua que se usa en cada descarga, antes de colocar el cilindro, es de 14 litros y la base de la caja mide 45 cm por 12 cm.

- Si no hubiera aparatos dentro de la caja, ¿qué altura alcanzaría el agua al llenarse la caja?
- Si los aparatos dentro de la caja ocupan un volumen de 1.62 $dm^3$, ¿cuál es la altura real que alcanza el agua?
- Si la caja no tuviera flotador, con los 14 litros de agua y el envase dentro de la caja el líquido alcanzaría una altura de 31.8 cm. ¿De cuántos litros es el envase?
- Si el cilindro tiene una altura de 16 cm, ¿cuánto mide su diámetro?

Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Comuniquen sus ideas sobre las ventajas de conocer la relación entre los elementos para calcular el volumen de prismas y cilindros. Comenten una situación de su vida cotidiana en la que podrían aplicar los conocimientos adquiridos.

## Practico

1. Responde.

   a. Si un prisma triangular tiene capacidad de 2.5 litros y su base mide 173.2 $cm^2$, ¿cuál es su altura?

   b. Un tinaco con forma de cilindro contiene 890 litros de agua. El volumen total del tinaco es de 2.45 $m^3$ y su altura es de 1.5 m.
   - ¿Cuánto mide el radio de la base del tinaco?
   - ¿Qué altura alcanza el agua que contiene el tinaco?

2. Una compañía lanzó al mercado un perfume con forma de prisma cuadrangular cuya capacidad es de 200 mL. El envase tiene una base de 50 mm por lado y una altura de 95 mm.
   - ¿Qué altura alcanza el líquido dentro del envase cuando el perfume es nuevo?
   - ¿Cuál es el volumen del envase que queda sin líquido?

### Utilizo las TIC

Utiliza una hoja de cálculo electrónica para encontrar la medida de la base o de la altura de diferentes cilindros: en la celda A1 escribe el encabezado "Volumen"; en B1, "Área de la base" y en C1, "Altura". En la columna A escribe diferentes volúmenes y en las columnas B y C alterna valores para las medidas de la base y la altura. Después, escribe en las celdas de la columna B o C que estén vacías la fórmula: $=\frac{A2}{B2}$ o $=\frac{A2}{C2}$, según corresponda, y da *enter* para obtener la medida que falta.

## Recapitulo

1. Un prisma recto es un cuerpo geométrico con dos bases que son polígonos congruentes y con caras laterales que son perpendiculares a las bases. Los prismas reciben su nombre dependiendo la forma de sus bases.
2. El volumen de cualquier prisma recto se calcula multiplicando el área de la base ($A_b$) por la altura ($h$). Esto es igual a la fórmula: $V = A_b h$. El área de un prisma regular es igual a perímetro por apotema entre dos: $A = \frac{Pa}{2}$
3. El cilindro es un cuerpo geométrico con las bases parelelas en forma de círculo y una cara lateral curva.
4. Al igual que en el caso de los prismas, para calcular el volumen de un cilindro se multiplica el área de la base por la altura: $V = A_b h$. Recuerda que el área de un círculo es: $\pi r^2$.
5. Cuando se conoce la altura o el área de la base de un prisma o cilindro y su volumen, para conocer la otra medida se divide el volumen entre la medida conocida, esto es: $A_b = \frac{V}{h}$ y $h = \frac{V}{A_b}$.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Calcula, a partir de las medidas que se muestran, los valores que faltan en la siguiente tabla.

| Número de lados del prisma | Apotema (cm) | Lados (cm) | Altura (cm) | Volumen (cm³) |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2.8 | 10 | | 546 |
| 9 | 11 | | 9.5 | 3 762 |
| 12 | | 14 | 21 | 46 040.4 |

**2.** Responde.

a. ¿Cuál es el volumen de un cilindro con radio de 14 cm y altura de 26 cm?

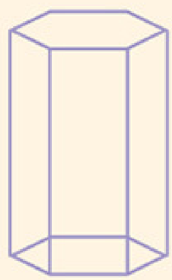
b. Si a un cilindro le caben 1.2 L de agua y el radio de su base mide 5 cm, ¿cuál es la altura del cilindro?

**3.** La imagen muestra una cubeta de pintura cuya capacidad es de 1 galón.

- Considerando la altura que se muestra, ¿cuál es el área de la base de la cubeta?
- ¿Cuántos centímetros mide el diámetro de su base?
- Si se utiliza pintura de manera que la que quede en la cubeta alcance 15 cm de altura, ¿cuántos litros se utilizaron considerando que no se desperdicia nada?


**4.** Retomemos el caso de los envases de jugo con forma de prisma hexagonal. Del jugo de un litro se llenó un vaso de 300 mL de capacidad.

- Si el área de la base del prisma mide 93.46 cm², ¿cuál es la altura del líquido que queda dentro del envase?
- Si del jugo de dos litros se llenan $2\frac{1}{2}$ vasos como el anterior, ¿qué volumen ocupa el líquido que queda dentro del envase? ¿Qué altura alcanza? Recuerden que el área de la base mide 166.28 cm².



# Logro ir **más allá**

Muchas de las ideas de los arquitectos para construir grandes edificios, casas o monumentos se basan en la forma de diferentes cuerpos geométricos: El Pentágono (edificio sede del Departamento de Defensa de Estados Unidos), como su nombre lo dice, tiene forma de prisma pentagonal; las Torres de Ciudad Satélite, en el Estado de México, tienen forma de prisma triangular, entre muchas otras obras de la arquitectura.

- ¿Qué edificios conoces con forma de prisma o cilindro?

1. Investiga en internet y registra el nombre de dos o tres edificios con estas características, el lugar donde se encuentran y su forma. Comparte tu trabajo con el grupo y con el maestro.
   - ¿Te imaginas un edificio hecho con cubos?

Esto lo hicieron realidad —o al menos visualmente crearon esa apariencia— un grupo de arquitectos en la ciudad de Estiria, Austria. El edificio que se observa en la imagen, llamado Frog Queen, es sede de la empresa de ingeniería Prisma. La fachada da la apariencia de estar formada por cubos negros, blancos y grises, pero al acercarse se observan huecos que son ventanas escondidas.

- Si cada cubo mide aproximadamente 0.7 m de lado, ¿cuál es el volumen del edificio?
- Supón que el edificio es un cubo hueco que se llena de agua; ¿cuántos litros le caben?
- Imagina que se tiene un cilindro con la misma altura y el mismo volumen del Frog Queen. ¿Cuál es la medida del radio del cilindro?
- Si la base de un prisma pentagonal tiene un área de 525 m$^2$, ¿cuál debe ser su altura para tener el mismo volumen que el del Frog Queen?
- Considera que los tres cuerpos geométricos mencionados contienen 2 800 kilolitros de agua; determina a qué altura se encontraría el agua en cada caso.

2. Explica el procedimiento que seguiste para responder.

L29

# Medidas de tendencia central y de dispersión

Exploro

**Utilizo las medidas de tendencia central para resolver un problema.**

Los alumnos de 2º A de la secundaria "Josefa Ortiz de Domínguez" organizaron un programa de talentos. Necesitaban 160 sillas y, para poder rentarlas, le pidieron a cada alumno una aportación voluntaria. Los 25 alumnos del salón aportaron la cantidad que se muestra en la siguiente lista, incluidos Claudia y Juan, quienes son los representantes del grupo:

$5.00, $8.00, $10.00, $10.00, $10.00, $10.00, $11.00, $12.00, $12.00,
$13.00, $15.00, $15.00, $16.00, $16.00, $17.00, $18.00, $18.00,
$19.00, $20.00, $21.00, $23.00, $24.00, $25.00

Claudia comentó que necesitan $400.00 para la renta de las sillas, por lo que ella y Juan pusieron lo que faltaba: $25.00 y $27.00, respectivamente.

- ¿Cuánto dinero juntaron entre los 23 compañeros de Juan y Claudia?
- ¿Cuánto aportaron en promedio los 23 compañeros?
- ¿Cuánto tendría que aportar cada uno si la contribución hubiera sido equitativa?
- ¿Cuál es la mediana de las 25 aportaciones?

Juan comentó que la mitad de los compañeros aportó una cantidad mayor o igual a la que les correspondía.

- Es cierto lo que dice Juan? ¿Qué medida de tendencia central puede justificar su postura?
- ¿Qué diferencia existe entre la media y la mediana?
- ¿Cuál es la moda?
- ¿Alguna de las medidas de tendencia central es más representativa del conjunto de datos? ¿Cuál? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuántos compañeros dieron más de lo que les correspondía si las aportaciones hubieran sido equitativas?

Determina el rango de las aportaciones:

- De acuerdo con la media o lo que cada quien debía aportar, ¿qué tan **dispersos** consideras que son los datos? ¿Por qué?

Reúnete con un integrante del grupo y comparen sus respuestas; recuerden registrar en su cuaderno las definiciones de las medidas de tendencia central. Discutan cómo determinarían qué tan dispersos son los valores de un conjunto de datos. Registren sus acuerdos.

**Leo +**

En la siguiente liga encontrarás un artículo interesante sobre la historia de la estadística.
cmed.mx/m272

**GLOSARIO**

**Dispersión.** Se refiere a la distribución o separación de un conjunto de valores tomando como referencia cierto valor.

## Descubro y construyo

**I. Calculo la media, la mediana, y la moda, así como el rango, y determino la dispersión de un conjunto de datos mediante diversos procedimientos.**

Trabajen, en parejas, y resuelvan los problemas.

1. Manuel participa en una competencia de lanzamiento de bala: la siguiente lista muestra el registro de sus lanzamientos, en metros:

   15.51, 15.76, 16.02, 15.96, 16.23

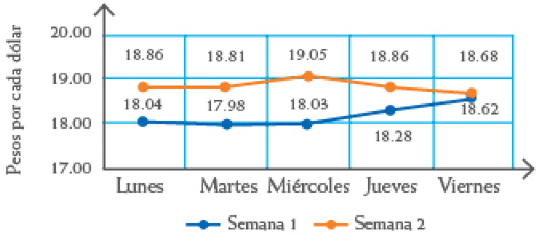
   Calculen la media de los lanzamientos.
   - ¿Cuál es la mediana del conjunto de datos?
   - ¿Cuál es la moda?
   - ¿Qué medida consideran que es más representativa de los resultados de Manuel?

   Determinen el rango de sus lanzamientos.
   - ¿Qué dirían del rendimiento del atleta: consideran que fue consistente en sus lanzamientos? Justifiquen su respuesta.

2. En la siguiente gráfica de línea se presenta el tipo de cambio del peso frente al dólar durante las dos últimas semanas de abril de 2018.

   Calculen la media, la mediana y el rango de cada semana.

Tipo de cambio (Peso-dólar)




Fuente: http://www.banxico.org.mx

Semana 1

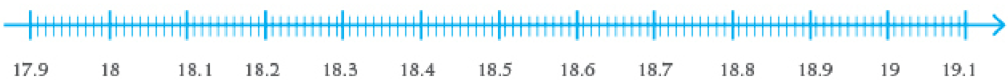
Media: ______ Mediana: ______ Rango: ______

Semana 2

Media: ______ Mediana: ______ Rango: ______

- ¿Alguna de las medidas anteriores permite establecer en qué caso los datos son más dispersos?

Representen un punto en la recta numérica para cada valor: los de una semana por arriba y los de la otra semana por debajo.




- ¿En qué semana varió más o fue más disperso el tipo de cambio? Justifiquen su respuesta a partir de la representación en la recta numérica.
- ¿Cambió su postura al ver los valores representados en la recta?

Comparen sus respuestas con otras parejas y acuerden cómo se puede determinar la dispersión de un conjunto y si tiene relación con la media o el rango. ¿Qué significa que los valores estén muy cercanos a la media?

## II. Utilizo las medidas de tendencia central para comparar conjuntos de datos, determino su rango y cuál tiene mayor dispersión.

Reunidos en equipos, resuelvan las siguientes actividades.

1. Tres empresas, con el mismo giro comercial y número de personal, presentaron los datos sobre los sueldos de sus empleados para evaluar qué empresa ofrece mejores sueldos. Las tablas muestran los sueldos y su frecuencia en cada empresa:

### Empresa A

| Salario ($) | 5 000 | 7 500 | 10 000 | 12 000 | 15 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 7 | 8 | 4 | 3 | 2 |

### Empresa B

| Salario ($) | 5 000 | 7 500 | 10 000 | 12 000 | 15 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 6 | 6 | 6 | 5 | 1 |

### Empresa C

| Salario ($) | 5 000 | 7 500 | 10 000 | 12 000 | 15 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 4 | 6 | 4 | 5 | 5 |

- ¿Cuántos empleados hay en cada empresa?

a. Calculen la media de los salarios de cada empresa:

Empresa A: __________ Empresa B: __________ Empresa C: __________

b. Calculen la mediana de cada empresa.

Empresa A: __________ Empresa B: __________ Empresa C: __________

- ¿Qué empresa ofrece mejores sueldos? ¿Qué medida permite determinarlo?
- ¿Cuál es el rango de los salarios en cada empresa?
- ¿Este dato permite saber en qué caso los salarios son más dispersos? Explíquenlo.
- ¿La cercanía o lejanía de los datos con la media, ¿puede definir cuál es la empresa con salarios más dispersos? ¿Por qué?

2. Calculen la distancia de cada salario a la media en cada caso y sumen los resultados. Recuerden que las distancias siempre se calculan en números positivos.
   - ¿En qué caso la suma es menor? ¿Qué representa con respecto a la dispersión?

Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Discutan cómo se puede determinar la dispersión de un conjunto de datos a partir de la media. Registren sus conclusiones.

## III. Analizo la dispersión de un conjunto de datos para tomar decisiones acerca de éstos.

Trabaja de manera individual las siguientes situaciones.

1. La siguiente lista muestra las calificaciones de dos alumnas durante el último periodo de exámenes trimestrales:

   Andrea: 9, 6, 9, 6, 6, 10, 10, 6          Karen: 7, 6, 8, 8, 9, 7, 10, 7

   - ¿Cuál es el promedio de cada alumna?
   - ¿Esta medida puede determinar quién tuvo mejor rendimiento?
   - ¿Cuál es el rango en cada caso?

   Representen las calificaciones de ambas alumnas en una recta numérica.

   - ¿En qué caso las calificaciones son menos dispersas?

   Sumen la distancia de las calificaciones con la media en cada caso.

   - ¿Este dato coincide con lo que observaron en la recta? ¿Quién tuvo un rendimiento más constante?

2. Una empresa empacadora de café está haciendo un estudio de calidad sobre la precisión del empacado; revisó los datos de la etiqueta de 50 bolsas de 1 kg y volvió a medirlas. Los resultados se presentan en la tabla, en gramos, ordenados de menor a mayor:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 987 | 988 | 989 | 989 | 989 | 990 | 991 | 991 | 991 | 993 | 993 | 994 | 995 |
| 995 | 995 | 996 | 997 | 997 | 998 | 998 | 999 | 999 | 1 001 | 1 001 | 1 001 | 1 002 |
| 1 003 | 1 003 | 1 004 | 1 004 | 1 004 | 1 005 | 1 005 | 1 006 | 1 007 | 1007 | 1 007 | 1 007 | 1008 |
| 1 008 | 1 009 | 1 009 | 1 010 | 1010 | 1 010 | 1 011 | 1 011 | 1 011 | 1 012 | 1 012 | | |

   - ¿Cuál es el valor máximo y el mínimo de los datos presentados en la tabla de la derecha?

   Determina el rango y establece 5 intervalos para agrupar los datos en clases, considerando cuáles serían los extremos; completa la tabla.

| Masa (g) | Marca de clase (g) | Frecuencia |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

   Calcula la masa promedio de las bolsas de café.

   - ¿Cuál es la mayor distancia de los datos a la media?
   - ¿Cómo consideras que es la dispersión de la masa de las bolsas?
   - De acuerdo con los resultados, ¿qué calidad consideras que tiene el empacado?

Compara tus respuestas con las de un integrante del grupo. Comenten sobre el problema de las calificaciones. ¿Qué ventajas tiene conocer la dispersión de un conjunto de datos? ¿Qué tan útil fue la medida de dispersión para conocer si la cantidad en gramos de las bolsas de café era el adecuado? Platiquen sobre la importancia de la dispersión en un conjunto de datos con el fin de llegar a acuerdos, y registren sus conclusiones.

L30

# La desviación media y la dispersión de los datos

Recuerda el problema de las bolsas de café de la lección anterior: en promedio las bolsas tenían una masa de 1 kg, pero había una diferencia de casi 30 g entre ellas. Para evitar errores en las mediciones por la deficiente calibración de los equipos, existe en México el CENAM (Centro Nacional de Metrología), que certifica los equipos y establece el rango de error permitido en sus mediciones.

Exploro

**Reconozco que las medidas de tendencia central no son suficientes para decidir.**

Lee el siguiente texto y responde.


Juan y sus amigos jugaban a lanzar un pequeño saco de arroz a una "Diana" dibujada en el piso, con valores del 0 a 10. Después de cinco rondas ganaría quien tuviera el mejor puntaje al sumar los tiros.

1. Escribe la suma de los puntos de cada jugador:

Juan 5, 4, 5, 6, 5: _____ Ernesto 7, 5. 8, 2, 3: _____
Jazmín 10, 10, 0, 0, 5: _____ Alicia 3, 4, 7, 9, 2: _____

- La suma de los puntos permite determinar quién fue el ganador? ¿Por qué crees?
- Ernesto propuso que el ganador sería quien tuviera mejor promedio; ¿este criterio permite establecer al ganador? ¿Por qué?
- Si con la información que tienen, sin hacer tiros extra, deciden elegir a un ganador, ¿qué criterio usarías para ello? Explica tu postura. ________________________________
- Jazmín propuso que el ganador sea quien tenga más tiros arriba de cinco. ¿Qué te parece la solución? Explica tu respuesta.

Juan piensa que el ganador debe ser aquel cuya puntuación esté más cerca del promedio.

- ¿Estás de acuerdo con su postura? Argumenta tu respuesta.
- ¿Qué relación tiene lo anterior con la dispersión de los datos del problema?
- Siguiendo la postura de Juan, ¿quién quedaría en primero y quién en último lugar? Explica por qué. ________________________________

Compara tus respuestas, en pareja. Discutan sobre los criterios que pueden seguir los amigos de manera que la designación del ganador sea lo más justa posible. Establezcan quién ganó con su regla.

Descubro y construyo

**I. Calculo la desviación de cada dato respecto a la media, y la suma de las desviaciones de un conjunto de datos.**

Considerando el mismo juego de la actividad anterior, un amigo les sugirió calcular la suma de la diferencia del promedio con cada tiro; quien tenga menor diferencia es el ganador.

1. En parejas, completen la tabla escribiendo debajo de cada tiro la diferencia con la media, es decir, restando la media a la puntuación de cada tiro. Media ($\overline{x}$) =_______

| Juan (puntos) | 5 | 6 | 5 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Diferencia con la media | | | | | |

| Ernesto (puntos) | 7 | 5 | 8 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Diferencia con la media | | | | | |

| Jazmín (puntos) | 10 | 10 | 0 | 0 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Diferencia con la media | | | | | |

| Alicia (puntos) | 3 | 4 | 7 | 9 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| Diferencia con la media | | | | | |

- ¿Qué observan? ¿Es éste un buen criterio para establecer al ganador? ¿Por qué?

La diferencia entre la media y el valor de cada dato se llama desviación y se denota como $d$. Algebraicamente, la desviación con un valor $x_i$ se escribe $d_i = \overline{x} - x_i$.

Ahora, sumen los valores absolutos de las diferencias de cada jugador.

- En qué caso la suma es menor y en cuál es mayor?
- ¿Consideran que el dato anterior es un buen criterio para establecer al ganador? Expliquen por qué.

2. Los resultados de cinco evaluaciones de Pedro fueron: 7.5, 8, 8.75, 9 y 7.75. Calculen su promedio.

Enlisten las desviaciones de cada calificación respecto a la media y súmenlas.

- ¿Qué patrón observas? ¿Qué relación hay con la desviación de la actividad anterior?

Sumen el valor absoluto de las desviaciones: ______________________________

Calculen la media de la suma anterior: ______________________________

- ¿Consideran que el dato anterior permite saber qué tan consistente fue Pedro en sus evaluaciones? ¿Por qué?

Comparen sus respuestas con otras parejas. Justifiquen por qué la suma de los valores absolutos de las diferencias con la media es un criterio válido para analizar y comparar conjuntos de datos. Registren sus conclusiones.

### Tomo Nota

La suma de las desviaciones de un conjunto de datos con respecto a la media siempre es cero, es decir, $d_1 + d_2 + \ldots =$ ____.

## II. Calculo la desviación media o absoluta de un conjunto de datos y la utilizo para medir su dispersión.

Trabaja con un compañero y resuelvan las siguientes actividades.

1. En la práctica de Física el profesor organizó al grupo en equipos para medir el tiempo que tarda en caer una piedra desde el tercer piso del colegio. El registro de cada equipo se muestra en la siguiente tabla.

| Equipo | Equipo 1 | Equipo 2 | Equipo 3 | Equipo 4 | Equipo 5 | Equipo 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo (s) | 1.82 | 1.78 | 1.81 | 1.77 | 1. 83 | 1.76 |

- ¿Cuál es el promedio de los tiempos obtenidos?
- ¿La media es un dato representativo de los tiempos? Explica por qué.
- ¿Cuál es el rango del conjunto de datos?
- ¿El rango permite establecer la dispersión de los datos?

### Tomo Nota

Se llama **desviación media** al promedio de los valores absolutos de la diferencia o distancia de cada dato respecto a la media. Se denota como $D$. Por ejemplo, la distancia a la media de un conjunto de datos es: 3, 6, 1, 8; por tanto,

$D = \frac{3+6+1+8}{4} = \frac{18}{4} =$ ________. Este valor permite determinar qué tan ______________ están los datos con respecto a la ________________.

Calculen la distancia de cada valor a la media y sumen los resultados. Recuerden que la distancia siempre se considera con número positivo.

| | Equipo 1 | Equipo 2 | Equipo 3 | Equipo 4 | Equipo 5 | Equipo 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Distancia a la media (m) | | | | | | |

- ¿Cuál es la suma de los valores de la tabla?

Calculen el promedio de los datos de la tabla: ____________

- ¿Cuál es la desviación media ($D$) de los valores del problema? $D$ = __________

  Calculen $\overline{x} - D$ = ________ Determinen $\overline{x} + D$ = ________
- De acuerdo con lo anterior, ¿qué tan dispersos consideran que están los tiempos obtenidos?
- ¿Consideran que los tiempos tomados y la media son un buen parámetro del tiempo real del experimento? ¿Por qué?

2. Los siguientes datos corresponden a las edades de los integrantes de dos equipos de futbol rápido. Calculen la media y el rango de cada equipo.

Equipo A: 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 16 Equipo B: 12, 12, 12, 12, 13, 15, 16, 16

Media: ______ Rango: ______ Media: ______ Rango: ______

- ¿Los valores anteriores permiten saber qué equipo tiene mayor dispersión en las edades? ¿Por qué?

Calculen la desviación media de cada equipo.

Equipo A: ______ Equipo B: ______

- ¿En qué equipo las edades de los jugadores son menos dispersas? Justifiquen su respuesta.

### Utilizo las TIC

En el siguiente video puedes repasar lo que viste en esta sección sobre desviación media: cmed.mx/m273

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Reflexionen sobre la utilidad de la desviación media para analizar la dispersión de un conjunto de datos. Propongan un ejemplo en el que se pueda utilizar esta herramienta y regístrenlo en su cuaderno.

### III. Calculo la desviación media y la uso para determinar la precisión en un conjunto de mediciones.

Trabajen en equipo y resuelvan los siguientes problemas.

1. El maestro de matemáticas pidió a sus alumnos que se reunieran en equipos para estimar la altura del asta bandera del colegio, aplicando la proporcionalidad de las sombras; los equipos anotaron los siguientes datos, en metros:

   5.22, 5.36, 5.21, 5.13, 5.25, 5.17, 5.26 y 5.24

   - ¿Cuál es el rango?
   - ¿Cuál es la media de los valores obtenidos por los estudiantes?
   - ¿Este dato permite saber qué tan precisas fueron las mediciones? ¿Por qué?

   Determinen la desviación media.

   - De acuerdo con los valores anteriores, ¿qué tan precisas fueron las mediciones anteriores? Expliquen su respuesta. ______________________________

   Un alumno utilizó una aplicación de su celular que simula un teodolito (instrumento usado por los topógrafos), y la prestó a cada equipo para que hicieran sus mediciones: se obtuvieron los siguientes datos, en metros:

   5.2, 5.19, 5.21, 5.19, 5.22, 5.21, 5.2 y 5.22

   Calculen la media y la desviación media.

   - Comparen sus datos con los que obtuvieron con el método el anterior. ¿Con qué método consideran que se obtuvo un valor más cercano a la medida real? Justifiquen su respuesta. ______________________________

2. En un restaurante compran paquetes de café con la misma cantidad de gramos, ya listos para preparar cierto número de cafeteras. En cada pedido, el encargado de control de calidad del restaurante mide el contenido de los paquetes. En la última entrega obtuvo estas masas:

   122 g, 128 g, 130 g, 125 g, 121 g, 135 g, 126 g, 121 g

   - ¿Cuál es la media del conjunto de datos?
   - De acuerdo con la media, ¿consideran que los paquetes cumplen con la masa requerida? ¿Por qué?

   Determinen la desviación media.

   - Si el restaurante tiene como norma que el contenido de café por cafetera no rebase en 15 g la receta, para que no pierda calidad, ¿el contenido de los paquetes de café cumple con esa norma?

**Utilizo las TIC**

En este video podrán ver un ejemplo más de la desviación media utilizando los datos de un gráfico de barras.
cmed.mx/m274

Trabajen en grupo y encuentren situaciones en las que la desviación media sea útil. ¿Qué repercusión tendrían medidas que están por arriba o por debajo de la desviación media en instrumentos quirúrgicos, partes de carros, arneses de seguridad, etc.? ¿Cuál es la importancia de un trabajo hecho con calidad?

# Recapitulo

1. Las medidas de tendencia central: media, mediana y moda, permiten determinar un valor representativo de un conjunto de datos.
2. La **dispersión** es la medida que permite saber qué tanto se alejan o dispersan de un punto central (normalmente la media aritmética) los datos de una muestra.
3. El **rango** es igual a la diferencia entre los límites superior e inferior.
4. Cuando la media o el rango no permite establecer la dispersión, las medidas de tendencia central no permiten obtener un análisis de un conjunto de datos.
5. La **desviación** es la diferencia de cada dato respecto a la media del conjunto. La suma de las desviaciones siempre es cero.
6. La **desviación media** o absoluta es el promedio de los valores absolutos de las desviaciones, es decir, la distancia de cada dato respecto a la media del conjunto.
7. Utilizamos la desviación media para determinar la dispersión de los datos.
8. La desviación media se puede utilizar para estandarizar mediciones y determinar la precisión de una medida.

# Evalúo mi aprendizaje

Abre tu **Itacate de evidencias** y revísalo para reconocer cómo has aprendido.

**1.** Se hizo un estudio de mercado en la Ciudad de México y se encontró que el cartón de huevo se vende en distintos precios según la zona de la ciudad. Los datos agrupados se presentan en la siguiente tabla de frecuencias.

| Precio ($) | Marca de clase ($) | Frecuencia |
|---|---|---|
| [26-28) | 27 | 4 |
| [28-30) | 29 | 8 |
| [30-32) | 31 | 12 |
| [32-34) | 33 | 4 |
| [34-36) | 35 | 2 |

Calcula el promedio del precio de venta:

Determina la mediana.

- ¿Cuál es el rango de precios?
- ¿Qué tan dispersos consideras que están los precios del huevo? ¿Por qué?

**2.** Calcula la media, el rango y la desviación media del siguiente conjunto de datos.

4, 0, 20, 5, 3, 14, 2, 1

Media: ___________ Rango ___________ Desviación media: ___________

- ¿Qué tan dispersos son los datos del conjunto? Explica por qué.

**3.** Se quiere comparar el rendimiento académico de los grupos 2° B y 2° C en matemáticas. El resultado de las evaluaciones se muestra en las siguientes tablas de frecuencias.

| 2° A | |
|---|---|
| Calificación | Frecuencia |
| 5 | 3 |
| 6 | 5 |
| 7 | 6 |
| 8 | 5 |
| 9 | 3 |
| 10 | 2 |

| 2° B | |
|---|---|
| Calificación | Frecuencia |
| 5 | 3 |
| 6 | 6 |
| 7 | 4 |
| 8 | 6 |
| 9 | 3 |
| 10 | 2 |

- Calcula el promedio de cada grupo. ¿Se puede determinar qué grupo tiene mayor rendimiento?
- ¿Cuál es el rango de cada grupo? Calcula la desviación media de cada grupo y determina cuál tuvo resultados más homogéneos o menos dispersos. Explica tu respuesta.

**4.** El gerente de una fábrica de jabón en polvo tomó una caja al azar para verificar que la cantidad en gramos de los paquetes de jabón cumplía con la norma de calidad de la empresa. Se determinó que si la desviación media del lote era superior a 10 gramos, el lote debía regresarse por no cumplir con dicha norma. Las masas, en gramos, de los paquetes fueron las siguientes:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 970 | 1 975 | 1 978 | 1 982 | 1 985 | 1 990 | 1 992 | 1 995 | 1 995 |
| 1 996 | 1 998 | 2 003 | 2 006 | 2 006 | 2 009 | 2 010 | 2 010 | 2 010 |

Calcula la media, el rango y la desviación media:

Media: ___________ Rango ___________ Desviación media: ___________

- ¿Qué sucederá con el lote de jabones? Justifica tu respuesta.___________________

# Logro ir **más allá**

Recibir educación de calidad es fundamental para tu desarrollo personal y para que te integres a la vida social y económica de una manera plena.

¿Sabes cuántos grados escolares cubre la educación obligatoria en México?

La OCDE observa que el número de años de escolaridad promedio entre sus miembros es de 17 años. En Finlandia se registra un promedio de 19.8 años; en Corea, de 17.4; en Alemania, de 18.3; y en Chile, de 17.3 años..

En la siguiente tabla se muestran los años de escolaridad promedio de la población mayor de 15 años, por estado, en nuestro país (según datos del INEGI). Analízala.

* Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico; ** Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos (International Student Assesment, por sus siglas en inglés).

Escolaridad de la población mayor de 15 años en México

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ciudad de México | 11.1 | México | 9.5 | San Luis Potosí | 8.8 |
| Nuevo León | 10.3 | Tamaulipas | 9.5 | Hidalgo | 8.7 |
| Sonora | 10 | Chihuahua | 9.5 | Zacatecas | 8.6 |
| Baja California Sur | 9.9 | Tabasco | 9.3 | Puebla | 8.5 |
| Coahuila de Zaragoza | 9.9 | Morelos | 9.3 | Guanajuato | 8.4 |
| Baja California | 9.8 | Tlaxcala | 9.3 | Veracruz | 8.2 |
| Aguascalientes | 9.7 | Jalisco | 9.2 | Michoacán | 7.9 |
| Quintana Roo | 9.6 | Nayarit | 9.2 | Guerrero | 7.8 |
| Sinaloa | 9.6 | Durango | 9.1 | Oaxaca | 7.5 |
| Querétaro | 9.6 | Campeche | 9.1 | Chiapas | 7.3 |
| Colima | 9.5 | Yucatán | 8.8 | | |

Fuente: http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/menu_edu.aspx?tema=P

- ¿Cuál es el nivel de escolaridad promedio en México?
- ¿Cuál es el rango en años de escolaridad?
- ¿Tu estado está por arriba o por debajo de la media nacional?

Calcula la desviación media.

- De acuerdo con lo anterior, ¿ qué opinión tienes de las diferencias en el nivel educativo del país?
- ¿Cómo consideras que se podría elevar el nivel de escolaridad promedio en México?

**Utilizo las TIC**

En la siguiente liga encontrarás el informe completo de la OCDE y un texto que habla sobre la importancia de la educación. Revisa: "Educación en Detalle por país"; selecciona "México" para que conozcas las metas que se pretende alcanzar en 2018. cmed.mx/m275

# EVALUEMOS
## LO APRENDIDO

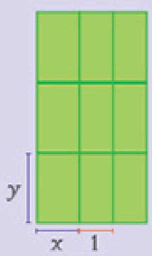
Revisa tu **Itacate de evidencias** antes de realizar tu evaluación.

### Reconoce tus emociones

Comparte aquí tus reflexiones sobre el texto: "El agua y el Sol" y las emociones que provocó en ti, antes de resolver las situaciones planteadas en el numeral **III** de esta evaluación.

¿Qué es para ti lo más importante de esta idea

*"Aunque nada cambie, si yo cambio, todo cambia".*




Reflexiona, en pareja, sobre cómo las matemáticas y otras ciencias ayudan a entender porqué es importante desarrollar las energías renovables; infórmate, toma una postura y actúa pensando en el bien común.

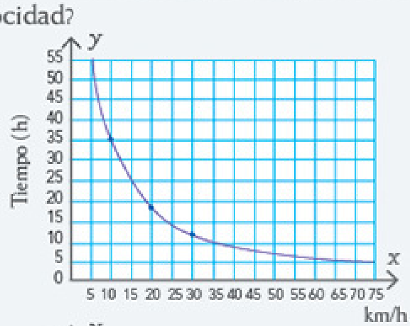
**I. Selecciona la opción correcta. En pareja, compara tus respuestas y procedimientos.**

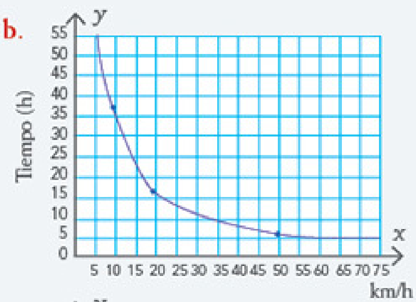
1. Un rectángulo tiene un perímetro de 48 cm. Si la base mide el triple de la altura, ¿qué sistema de ecuaciones representa el problema?

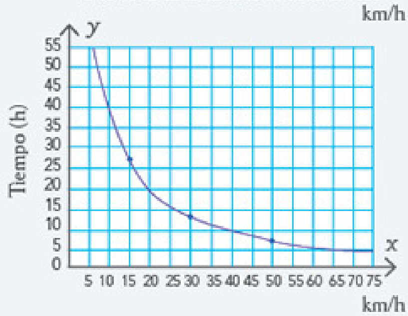
| | | | |
|---|---|---|---|
| $x + 3 = y$ | $x + 3y = 48$ | $x = 3y$ | $3y = x$ |
| $2x \times 2y = 48$ | $x + y = 48$ | $2x + 2y = 48$ | $2x + 58 = 2y$ |

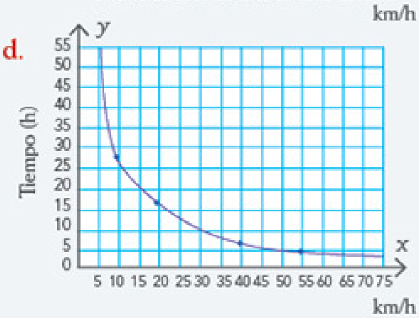
2. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
$4x + 3y = 20$; $2x - y = 5$?
a. $x = 2.5$; $y = 3.3$  b. $x = 3.5$; $y = 2$  c. $x = 2$; $y = 4$  d. $x = 4.5$; $y = 2$

3. Un automóvil tiene que realizar un viaje de 360 km y se quiere saber en cuánto tiempo se realizará el recorrido considerando diferentes velocidades. ¿Qué gráfica muestra cómo cambia el tiempo del recorrido de acuerdo con la variación de la velocidad?

a.



b.



c.



d.



4. ¿Qué expresión algebraica no corresponde al área de la figura de la izquierda?
a. $3y(x + 2)$  b. $3xy + 2y + 2y + 2y$  c. $yx + yx + yx + y$  d. $3x + 6x + 3y$

5. Si el área de un polígono regular mide aproximadamente 813.75 cm², sus lados miden 15 cm y su apotema 15.5, ¿de qué polígono se trata?
a. Hexágono  b. Pentágono  c. Heptágono  d. Octágono

6. Un aspersor de agua tiene un alcance de 4.5 m de largo. ¿Cuál es el área que riega al dar una vuelta completa?
a. 127.17 m²  b. 28.96 m²  c. 63.585 m²  b. 76.615 m²

7. Un prisma pentagonal tiene una altura de 22 cm y su volumen es de 8 516.42 $cm^3$. Si se llena hasta 16 cm de altura de su capacidad, ¿cuál es el volumen que ocupa su contenido?

a. 6 193.76 $cm^3$ b. 5 652.92 $cm^3$ c. 4 785.54 $cm^3$ d. 7 854.46 $cm^3$

8. ¿Cuál de los siguientes cilindros tiene una capacidad aproximada de 2 litros?

a. Radio: 6.5 cm
Altura: 16 cm

b. Radio: 7.2 cm
Altura: 12 cm

c. Radio: 8 cm
Altura: 11 cm

d. Radio: 9 cm
Altura: 8.8 cm

9. ¿Cuál es la desviación media del siguiente conjunto de datos: 4, 8, 4, 8, 10, 5?

a. 2.5 b. 2.45 c. 2.16 d. 1.89

10. ¿Qué conjunto de datos es más disperso?

Conjunto A: 11, 6, 9, 7, 9

Conjunto B: 12, 5, 8, 7, 10

a. No se puede determinar
b. El conjunto B
c. Tienen la misma dispersión
d. El conjunto A

**II. Resuelve los siguientes problemas.**

1. Carlos pagó $458.00 por 2 memorias USB y 3 microchips. Manuel pagó $447.00 por 3 memorias USB y 2 microchips. ¿Cuánto cuesta cada memoria y cada microchip?

2. Si el área de una figura geométrica es igual a $2y(3x + 4) + 2$. ¿De qué otra forma se puede representar el área de la misma figura?

3. Un cilindro tiene un radio de base 8 cm y una altura de 14 cm. ¿Cuánto mide el radio de un cilindro que tiene el mismo volumen pero su altura es de 16 cm?

**III. Lean, en grupo, el texto de inicio del Módulo 3 y contesten:**

1. Un calentador solar se coloca dentro de un área circular que mide 4.17 $m^2$; ¿cuál es la medida del diámetro de ese espacio?

2. Un conjunto de paneles solares fotovoltaicos produce suficiente energía para 360 personas durante 30 horas. ¿Cuánto tiempo durará la energía si se aumentan 40 personas más?

3. El tanque de almacenamiento de un calentador solar (termotanque) generalmente tiene forma de cilindro; supongamos que un calentador tiene un tanque de 30 cm de diámetro y un metro de largo. ¿Cuál es la capacidad en litros de este tanque?

**IV. Verifiquen, en parejas, que completaron correctamente los Tomo nota de este Módulo.**

## Mis logros y metas

Como ya tienes completo y revisado tu **Itacate de evidencias**, puedes fácilmente reconocer lo que has aprendido. Completa el cuadro con lo que se pide en cada caso. Apóyate en la **Ruta de aprendizaje.**

| INDICADOR DEL LOGRO | LO SÉ<br>Tengo el conocimiento | | LO SÉ HACER<br>Desarrollé las habilidades para representar y seguir procedimientos | |
|---|---|---|---|---|
| | Sí | Aún no, ¿qué me falta por aprender? | Sí | Aún no |
| **Resuelvo** problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. | | | | |
| **Analizo** y **comparo** situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreto y resuelvo problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos. | | | | |
| **Formulo** expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifico equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras). | | | | |
| **Calculo** el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos. | | | | |
| **Calculo** el volumen de prismas y cilindros rectos. | | | | |
| **Uso** e **interpreto** las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decido cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión. | | | | |

| LO VALORO | | COMENTARIOS |
|---|---|---|
| Sí | No | ¿Cómo lo lograré? |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

## Habilidades del siglo XXI

Marca con una (✓) las habilidades que consideres que has alcanzado:

- ☐ Confío en mí
- ☐ Percibo mis emociones
- ☐ Soy responsable
- ☐ Muestro empatía
- ☐ Tengo sentido de comunidad
- ☐ Me comunico
- ☐ Colaboro / participo
- ☐ Me adapto
- ☐ Muestro creatividad
- ☐ Muestro curiosidad e interés
- ☐ Tengo iniciativa
- ☐ Soy persistente
- ☐ Planteo metas positivas
- ☐ Resuelvo problemas
- ☐ Manejo la información
- ☐ Uso los medios
- ☐ Manejo la tecnología
- ☐ Soy consciente del mundo natural y social

# Apéndice

| PROGRAMA DE LA ASIGNATURA | | | LIBRO DE TEXTO |
|---|---|---|---|
| MATEMÁTICAS SECUNDARIA. 2° | | | |
| EJES | Temas | Aprendizajes esperados | Páginas |
| NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN | Multiplicación y división | • Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.<br>• Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.<br>• Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas. | 18 a 31<br>32 a 45<br>100 a 123 |
| | Proporcionalidad | • Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional. | 40 a 61 |
| | Ecuaciones | • Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. | 62 a 67<br>130 a 137<br>178 a 191 |
| | Funciones | • Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos. | 192 a 199 |
| | Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes | • Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.<br>• Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras). | 124 a 129<br>200 a 207 |

| PROGRAMA DE LA ASIGNATURA | | | LIBRO DE TEXTO |
|---|---|---|---|
| MATEMÁTICAS SECUNDARIA. 2° | | | |
| EJES | Temas | Aprendizajes esperados | Páginas |
| FORMA, ESPACIO Y MEDIDA | Figuras y cuerpos geométricos | • Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares. | 68 a 83 |
| | Magnitudes y medidas | • Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).<br>• Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.<br>• Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos. | 138 a 151<br>208 a 223<br>224 a 239 |
| ANÁLISIS DE DATOS | Estadística | • Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.<br>• Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión. | 152 a 169<br>240 a 249 |
| | Probabilidad | • Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio. | 84 a 91 |

## Recomendada para los estudiantes

Frabetti, C. (2000). *Malditas matemáticas*. México: Alfaguara juvenil.

Ko, Seok-ku. (2012). *Matemáticas asombrosas de matemáticos excéntricos*. México: Ediciones Castillo/SEP. Col. Libros del Rincón.

Littan, J. (2014). *Mates divertidas para gente ingeniosa*. México: Ediciones SM.

Magnus Enzensberger, H. (2016). *El diablo de los números*. México: SEP/Siruela. Col. Libros del Rincón.

Paenza, A. (2008). *Matemática... ¿Estás ahí?* Episodio 100. Argentina: Siglo Veintiuno Editores. Col. Ciencia que ladra.

Potter, L. (2015). *A jugar con las matemáticas*. México: SEP/Hiperlibro. Col. Libros del Rincón.

Sierra i Fabra, J. (2004) *El asesinato del profesor de matemáticas*. México: Anaya.

Tahan, M. (2014). *El hombre que calculaba*. México: Limusa.

VanCleave, J. (2009). *Matemáticas para niños y jóvenes*. México: Limusa-Wiley. Col. Biblioteca Científica.

Wardle, T. (2003). *La suma más difícil del mundo*. Madrid: Ediciones SM.

## Consultada


Alagia, H., Bressan, A. & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática.* Buenos Aires: Libros del Zorzal. (Formación Docente Matemática).

Alanís, J. & Cantoral, R., *et. al.* (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Alsina i Pastells, A. (2010). *Educación matemática. El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemática.* México: Santillana. Vol. 22, Núm. 1, pp. 149-166.

Planas, N. & Alsina i Pastels, A. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas. Infantil, primaria, secundaria y educación superior*. Barcelona: Graó.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: SEP (Biblioteca para la actualización del Maestro de la Secretaría de Educación Pública).

Gascón Pérez, J. (1994). *El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas*. Barcelona: *Suma,* Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Marrase, P. J. (2016). *La Belleza de las Matemáticas*. Barcelona: Plataforma.

Ramírez, M. & Block, D. (2009). *La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares, Educación Matemática*. México: Santillana. Vol. 21 (1), pp. 63-90.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). *La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del Álgebra en secundaria*. España: Investigación en Educación Matemática XIV, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 545-556.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemáticas hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal. (Formación Docente-Matemática).

Sáenz de Cabezón, E. (2016). *Inteligencia matemática. Descubre al matemático que llevas dentro.* Barcelona: Plataforma.

## Recomendaciones para navegar en la red

1. No te quedes en la primera referencia a la que te remite el buscador.
2. Busca páginas que contengan citas de libros especializados.
3. Busca páginas de instituciones educativas (universidades) pues éstas suelen ser permanentes y confiables.
4. Wikipedia es un buen comienzo, pero no te debes quedar ahí. Conviene que revises las referencias, la bibliografía y los enlaces externos que están relacionados con la página de Wikipedia que consultaste y, además, no pierdas de vista que mucha de la información a la que remite puede ser muy técnica.
5. Wikipedia sirve para contrastar la información que se presenta en otras páginas. Normalmente es confiable, pero también insuficiente.
6. Los *blogs* en internet suelen caducar (no son permanentes) y por ello mucha información valiosa puede dejar de estar disponible.
7. Merece la pena hacer el esfuerzo de establecer contacto vía correo electrónico con el autor de una página que te resulte interesante.
8. La calidad de una investigación aumenta conforme se incrementa la cantidad y calidad de sus fuentes.
9. En Ciencias y Matemáticas las páginas en inglés suelen estar más completas y contener información más actualizada.
10. Los textos que no encuentres en la biblioteca de tu escuela búscalos como archivos pdf.
11. Busca en la red entrevistas con autores reconocidos, puedes encontrarlos como texto o como video.
12. Si escribes entre comillas, por ejemplo: "caminos, azar y probabilidad", el buscador listará todas las páginas donde encuentre esta frase literalmente.
13. Sistematiza tus propios métodos de búsqueda.
14. Recuerda que los libros son insustituibles y que las referencias que encuentras en la red son sólo otra forma de adquirir información. Además siempre será mejor, ya sea que consultes libros o la red, que busques en los textos de los autores que generaron la información que estás investigando.

## Consultadas


**Agrega**

agrega.educacion.es/

Es una plataforma con contenidos educativos para profesores y alumnos, de uso directo y para su descarga.

**AAAMath**

http://www.aaamatematicas.com/

Variedad de lecciones interactivas de matemáticas con solución.

**APRENDE 2.0**

https://recursos.aprende.edu.mx/#/

Plataforma única de contenidos educativos digitales desarrollados principalmente por la Secretaría de Educación Pública para la educación básica.

**Boletín UNAM**

http://www.dgcs.unam.mx/boletin/bdboletin/2018_331.html

*Avanza la humanidad hacia El "Abismo Energético"*. Edgar Ocampo Téllez

**Colegio Nacional de Educación para la Vida y el Trabajo**

http://www.conevyt.org.mx/

Portal educativo de la Secretaría de Educación Pública con un conjunto importante de recursos tecnológicos aplicados a la educación.

Busca: "Ejercicios de reforzamiento de matemáticas nivel secundaria".

**Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios**

**Financieros**

www.condusef.gob.mx

Página que depende de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, que otorga medidas preventivas para orientar, informar y promover la educación financiera, así como atender y resolver las quejas y reclamaciones de los usuarios de servicios y productos financieros.

**Cuéntame**

www.cuentame.inegi.org.mx/

Es una página de Instituto Nacional de Geografía e Informática que está dirigida a niños y jóvenes donde se otorgan cifras acerca del territorio, la población y la economía de México.

**Disfruta las Matemáticas**

www.disfrutalasmatematicas.com

Aquí encontrarás muchos temas de matemáticas para entretenerte y aprender.

**EduCaixa**

https://www.educaixa.com/

Plataforma educativa de Obra Social "la Caixa" diseñada especialmente para que el maestro encuentre todo lo que necesita para preparar y organizar sus clases. Contiene recursos en línea para los alumnos y mucho más.

**EducaLAB**

http://educalab.es/

Sus creadores dicen: "Es un lugar de encuentro para la educación. Su objetivo es apoyar a los docentes y en sentido amplio a todo el sistema educativo español desde el conocimiento y la cercanía, desde los datos y el análisis y desde la investigación, la experimentación y la innovación".

**Enseñanza de las ciencias**

http://ensciencias.uab.es/

Revista digital de investigación y experiencias didácticas. Los contenidos se pueden leer y descargar libremente.

**Espacio Procomún Educativo**

http://procomun.educalab.es/

Encontrarás Recursos Educativos Abiertos (REA) para su descarga y uso directo por el profesor y el alumno. Podrás buscar en "Histórico de Recursos", por asignatura.

**Educaplus**

http://www.educaplus.org/games/matematicas

Recursos de matemáticas multimedia.

**Ejercicios de Matemáticas**

https://www.ematematicas.net/

**Estadística para todos**

http://www.estadisticaparatodos.es/

"Es un sitio de enlaces, tutoriales, artículos, recursos y contenidos estadísticos dirigido a profesores y alumnos de secundaria, para extender y estimular la educación educativa."

**Fide: Fideicomiso para el ahorro de la energía eléctrica**

http://www.fide.org.mx

"Programa de Ahorro de Energía Eléctrica; para coadyuvar en las acciones de ahorro y uso eficiente de la energía eléctrica."

*Educación y acción en el ahorro de energía eléctrica*

**GeoGebra**

geogebra.org/cms/es/

Plataforma interactiva de Matemáticas y Ciencias para enseñar y aprender. Entre los objetivos generales de las actividades propuestas aquí, siempre estarán fomentar el uso de cuetro verbos: ver, tocar, investigar y descubrir.

**Guía para el trabajo con Desafíos Matemáticos. Secretaria de Educación Pública**

http://www.sec.gob.mx/coordinacion/uploads/PETC/interiores%20Z7508.pdf

**Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Historia (INEGI)**

http://www.inegi.org.mx/

**Junta de Andalucía**

http://www.juntadeandalucia.es/educacion/portalaverroes/contenidosdigitales/

Recursos digitales y materiales educativos.

**Khan Academy**

https://es.khanacademy.org

Plataforma que ofrece ejercicios de práctica, videos instructivos y un panel de aprendizaje personalizado que permite a los alumnos aprender a su propio ritmo, dentro y fuera del salón de clases.

**Matemáticas visuales**

http://www.matematicasvisuales.com/

Encontrarás exposiciones visuales de conceptos matemáticos.

**Museo Interactivo de Economía (MIDE)**

http://www.mide.org.mx/mide/maestros/

Una plataforma interactiva para entender las finanzas y la economía del mundo.

**Oei**

**Biblioteca digital**

http://www.oei.es/historico/bibliotecadigital.php

**Plan Ceibal**

http://rea.ceibal.edu.uy/

Contenidos educativos organizados de acuerdo al currículo de las enseñanzas de niveles anteriores a la universidad y preparados para descarga y uso directo por los profesores y alumnos.

**Portal Educativo**

www.portaleducativo.net/

*Contenidos educativos* útiles *para que los alumnos puedan estudiar, practicar y resolver sus necesidades y dudas en un solo lugar. Todo esto, potenciado con aplicaciones interactivas y profesores online.*

**Revista de cultura científica**

http://www.revistaciencias.unam.mx/en/

**Revista de la** *Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de* México.

Busca difundir información y hacer de la ciencia un instrumento para el análisis de la realidad y ampliar la cultura científica de la población.

SM-Conectados

www.smconectados.com/

Servicio exclusivo para profesores.

**Thatquiz**

www.thatquiz.org/es-0/?-j104-l9-p0

Sitio web para la enseñanza de las matemáticas.

**Vitutor**

https://www.vitutor.com

Es una plataforma diseñada para el aprendizaje en línea de distintas materias. Contiene ejercicios y respuestas además de cursos y tutoriales.

**UNO**

http://uno.grao.com/

Revista de Didáctica de las Matemáticas.

## Ligas electrónicas generales

**Coolmath Store**

www.coolmath-games.com/

Lecciones, juegos y aplicaciones de matemáticas, divertidas y gratuitas.

**Correo del Maestro.**

www.correodelmaestro.com

En esta página puedes encontrar todos los temas que abordan los docentes en la educación básica.

**Math worksheets and printables**

www.education.com/worksheets/math/

Hojas de trabajo de matemáticas para un aprendizaje atractivo (en inglés).

**NrichMaths (Enriqueciendo las Matemáticas)**

http://nrich.maths.org/frontpage

Sitio de la Universidad de Cambridge donde se proponen ejercicios desafiantes de matemáticas (en inglés).

Red Escolar ILCE

http://red.ilce.edu.mx

Un espacio para el fomento del aprendizaje y la cultura digitales.

**Revista de investigación en Didáctica de la Matemática.** *PNA.*
www.pna.es
Revista de investigación en Didáctica de la Matemática cuyo fin es promover y difundir la investigación de calidad que se realiza en España y el mundo.

**Revista de Didáctica de las Matemáticas. *Números.***
www.sinewton.org/numeros
Publicación que incluye trabajos de interés para el profesorado de educación primaria y secundaria, principalmente.

**Revista EPSILON de la SAEM THALES**
http://thales.cica.es/epsilon
Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

**Revista Iberoamericana de Educación Matemática. *UNIÓN.***
www.fisem.org/web/union
Publicación que difunde trabajos sobre educación matemática, destinados al profesorado en activo, de todos los niveles educativos (desde educación infantil hasta la universidad).

**Revista Latinoamericana de Etnomatemática**
www.etnomatematica.org
Aborda los aspectos socioculturales y políticos del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de entrevistas y reseñas que divulgan trabajos de investigación de Etnomatemática.

**Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**
www.clame.org.mx/relime.htm
Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

**Revista Mexicana de Investigación Educativa**
www.comie.org.mx/v1/revista/portal.php
Revista en la que encontrarás aportes a la enseñanza de una metodología educativa, con prioridad en México y América Latina.


# Créditos iconográficos

## Bancos de imagen

© Shutterstock: pp. 18, 21, 24, 45, 66, 74, 81, 91, 102, 106, 123, 129, 134, 137, 144, 160, 174, 207, 214, 231, 232, 239, 244, 249.

Pixabay: pp. 102, 106, 144 (izq.), 199.

Unsplash: p. 14: Matthew Kalapuch, p. 96: Thomas Richter, p. 152: Dan Gold, p. 208: Joe Hernández.

## Otras fotografías

© Carlos Hahn: pp. 61, 67, 147, 169, 178, 191.

© Julián Ramírez Araujo: pp. 67, 83 (arr. y ab.), 227.

## Dominio Público

p. 31: Lewis Carroll, ilustración de John Tenniel, p. 151: Detalle *Códice Mendoza*, pp. 192, 208.

## Ilustraciones

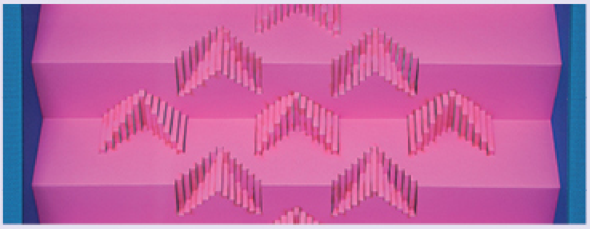
José Francisco Ibarra Meza π.

Graciela Pérez Guzmán: pp. 24, 34, 39, 101.

## Fotografía de cubierta

© Carlos Hahn

Obra: © Alba Rojo Cama †, *"Sin título"* (2009).



Este libro se imprimió en
el mes de septiembre del 2018.